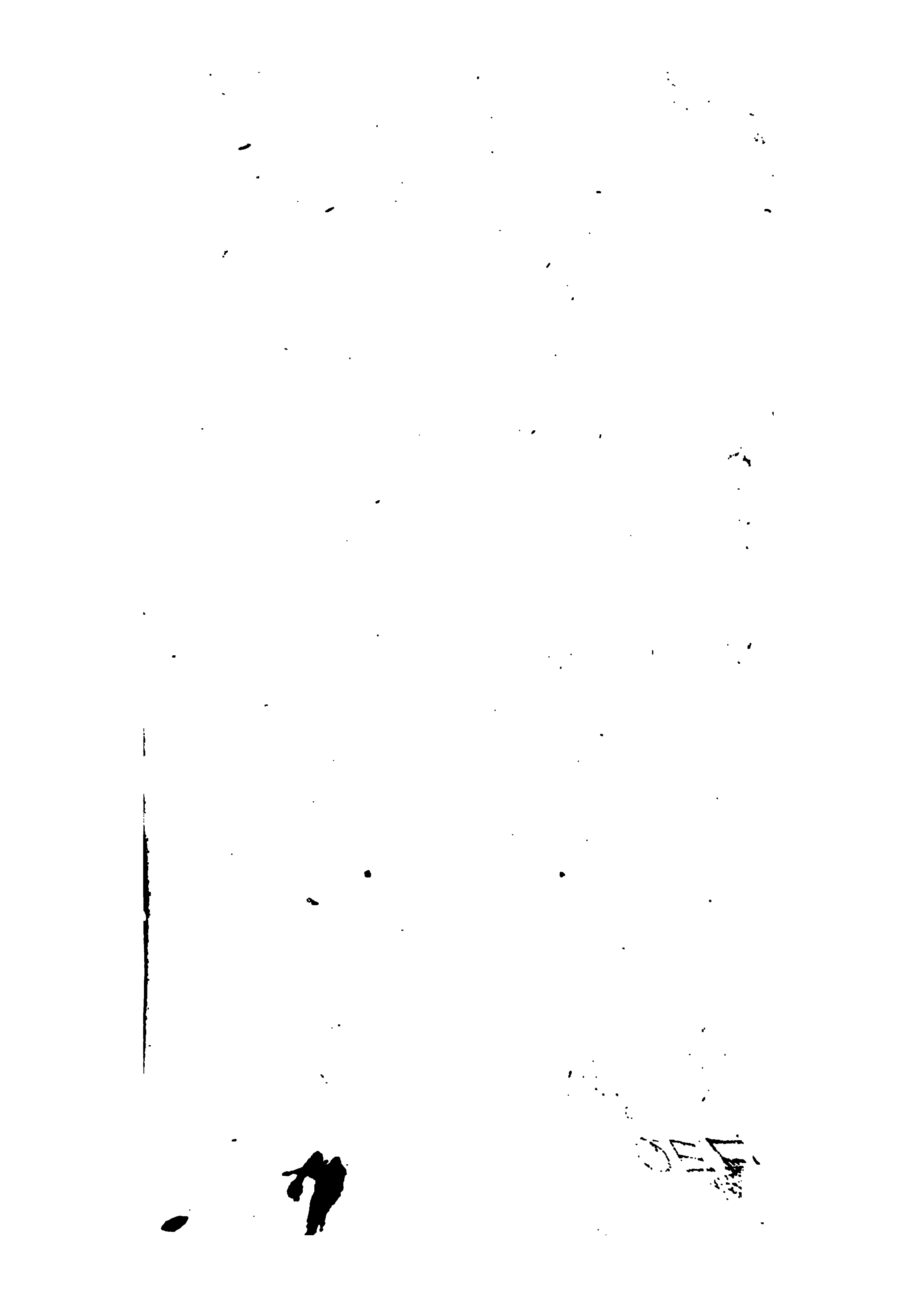

3 3433 06272628 0







COURS
DE
MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences, & de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Éleves & Aspirans au Corps Royal de l'Artillerie, & Censeur Royal.

PREMIERE PARTIE.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES,
Imprimeur ordinaire du Roi, rue S.-Jacques.

M. DCC. LXXXI.
Avec Approbation, & Privilege du Roi.

1781

A MONSEIGNEUR

LE DUC

DE CHOISEUL,

PAIR DE FRANCE, CHEVALIER DES ORDRES DU ROI ET DE CELUI DE LA TOISON D'OR, COLONEL GÉNÉRAL DES SUISSES ET GRISONS, LIEUTENANT GÉNÉRAL DES ARMÉES DU ROI, GOUVERNEUR DE TOURAINE, GRAND BAILLI D'HAGUENAU, MINISTRE ET SECRÉTAIRE D'ÉTAT DE LA GUERRE ET DE LA MARINE, CHARGÉ DE LA CORRESPONDANCE DES COURS D'ESPAGNE ET DE PORTUGAL, GRAND MAITRE ET SURINTENDANT GÉNÉRAL DES POSTES ET RELAIS DE FRANCE, &c. &c. &c.

MONSEIGNEUR,

En agréant que Votre Nom paroisse à la tête de cet Ouvrage, Vous comblez un desir que plus d'un motif a dû faire naître en moi. Mais rien ne me

rend cette faveur plus précieuse, que la liberté qu'elle me donne de rendre publics mon respect & ma reconnoissance pour Vous.

En m'admettant à partager avec les Gens de Lettres l'accueil que Vous faites aux Sciences & aux Arts, Vous daignez encore diriger mes travaux vers un objet utile. Puisse cet Ouvrage, MONSEIGNEUR, *répondre à des vues si sages & si éclairées! Elles président à toutes les parties de Votre administration, & Vous assurent une gloire dont Vous êtes plus jaloux que de l'éclat des dignités & de la naissance.*

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur,
BÉZOUT.



PRÉFACE.

LE Cours de Mathématiques dont nous donnons aujourd'hui la premiere Partie, doit rassembler les connoissances élémentaires que M. le Duc de Choiseul a jugé nécessaire d'exiger des Gardes du Pavillon & de la Marine, avant de les admettre au rang d'Officiers de Vaisseaux.

Quelque utile qu'il soit d'instruire de bonne heure ces jeunes Gentilshommes, dans la pratique d'un art aussi étendu que celui de la Navigation, on ne peut douter que la connoissance préliminaire des principes sur lesquels portent les regles de l'art, ne doivent contribuer beaucoup à faire fructifier les leçons qu'ils recevront ensuite de l'expérience, ne les dispose à y être plus attentifs, & par conséquent n'accélere beaucoup leurs progrès.

D'ailleurs, il est si rare qu'un esprit accoutumé à obéir servilement aux seules regles de la pratique, se replie ensuite assez sur lui-même, pour revenir avec succès à l'étude de la théorie, qu'on ne peut trop tôt les disposer à profiter des avantages qu'ils peuvent retirer de celle-ci.

Presque toutes les méthodes de la Naviga-

tion pratique ſont fondées ſur des connoiſſances mathématiques : comment pourroit-on différer d'inſtruire des principes de ces ſciences, ceux qui ſont deſtinés à en diriger un jour l'application.

Pour me conformer, autant qu'il eſt en moi, aux vues du Miniſtre qui a bien voulu me confier l'examen des études des Gardes du Pavillon & de la Marine, ainſi que la compoſition d'un Cours de Mathématiques à leur uſage, j'ai cru devoir m'attacher à concilier ces deux points, la néceſſité d'inſtruire ces Eleves ſur les connoiſſances mathématiques relatives à leur objet, & celle de les en inſtruire dans un intervalle de tems qui ne leur fit rien perdre de l'avantage qu'il doit y avoir à aller de bonne heure à la Mer.

Pour ſatisfaire à ces deux objets, je me ſuis propoſé 1°. de borner le Cours d'Etudes d'obligation, aux propoſitions directement utiles à la Navigation, & à celles qui ſeroient indiſpenſables pour l'intelligence de celles-là. 2°. De faciliter cette étude, en la rendant plus intéreſſante par de fréquentes applications à la pratique, priſes principalement dans la Marine; ce qui réunit encore l'avantage de diſpoſer l'eſprit des Commençants à ſaiſir de bonne heure le lien qui unit la théorie à la pratique.

Mais dans la vue de concourir, autant qu'il m'eſt poſſible, au progrès d'un art auſſi important, j'ai cru devoir ne pas perdre de vue ceux

de ces jeunes Gentilshommes qui joignant à une noble émulation, des diſpoſitions plus marquées que les autres, auroient le deſir de s'inſtruire plus parfaitement. C'eſt dans cette vue que j'aurai ſoin de répandre dans ce Cours des connoiſſances plus étendues, & ſpécialement celles qui peuvent faciliter l'intelligence des ouvrages de feu M. Bouguer, & de quelques autres ouvrages non moins utiles à la Marine, dont on n'a pas encore retiré, à beaucoup près, tout le fruit qu'on peut en eſpérer, parce que les études des Gardes n'y étoient pas dirigées auſſi pleinement qu'on ſe propoſe de le faire.

Ces connoiſſances qu'il eſt louable d'acquérir, & auxquelles on ne peut trop inviter les Gardes du Pavillon & de la Marine de s'appliquer; ces connoiſſances, dis-je, ne ſeront point d'obligation, & nous aurons ſoin de les diſtinguer de celles-ci, par un caractere dont nous avertirons.

Le Cours de Mathématiques dont il s'agit ici, ſera diviſé en quatre Parties.

La premiere traite de l'Arithmétique.

La ſeconde traitera de la Géométrie, dans laquelle on comprendra la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie ſphérique.

La troiſieme aura pour objet, l'Algebre & l'application de l'Algebre à la Géométrie.

La quatrieme comprendra la Statique & le Mouvement, avec quelques propoſitions d'Hydroſtatique & d'Hydraulique.

Nous avons préféré de faire ſuccéder l'Algebre à la Géométrie plutôt qu'à l'Arithmétique ; parce qu'outre que l'Algebre nous eût été d'une utilité très-médiocre dans la Géométrie élémentaire, les Commençans ne ſont d'ailleurs pas encore aſſez exercés dans les raiſonnemens mathématiques, pour ſentir la force des démonſtrations algébriques, quoique celles-ci ſoient ſouvent plus ſimples, que les démonſtrations ſynthétiques ; au lieu que dans la diſpoſition que nous avons choiſie, on a lieu de croire que les Commençans déjà fortifiés par l'étude des deux premieres Parties, en auront d'autant plus de facilité à généraliſer leurs idées, & ſaiſiront mieux les uſages nombreux qu'on peut faire de cette ſcience ; d'ailleurs ayant déjà plus de connoiſſances acquiſes, ils ſeront plus à portée de ſe familiariſer avec cette ſcience, par un plus grand nombre d'objets auxquels ils pourront l'appliquer.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail ſur l'exécution des trois dernieres parties du Cours; nous nous bornerons à rendre compte de celle-ci. Elle renferme ſous un volume aſſez peu conſidérable, ce qu'il eſt néceſſaire de ſavoir, non-ſeulement pour appliquer les connoiſſances mathématiques que nous enſeignerons par la ſuite ; mais encore pour ſatisfaire à divers autres uſages. En expoſant les méthodes, nous avons évité de les multiplier pour un même objet, parce qu'on ne peut veiller trop ſoi-

gneusement à ne pas partager l'attention dans les commencemens; c'est un abus que de dire, en faveur de l'opinion contraire, qu'il est utile d'envisager un objet sous différens aspects : cela n'est vrai que lorsqu'on a acquis un certain nombre de connoissances. C'est par ce même principe, que nous avons cru devoir resserrer les raisonnemens & les discours, dans beaucoup d'endroits : les Commençans, peu ou point du tout faits à raisonner méthodiquement, perdent, en parcourant un long échafaudage de Logique, la force de tête qui leur est nécessaire pour saisir l'esprit d'une démonstration.

On a donc fait ensorte de ne donner aux raisonnemens, que l'étendue nécessaire pour être bien entendus, & d'en élaguer ces attentions scrupuleuses qui vont jusqu'à démontrer des axiomes, & qui à force de supposer le Lecteur inepte, conduisent enfin à le rendre tel.

J'ai tâché d'applanir la route, soit en simplifiant des raisonnemens déjà employés, soit en leur en substituant de nouveaux qui m'ont paru plus clairs, soit enfin en employant un langage familier & simple. C'est au Public à juger si j'ai réussi; mais on ne doit pas s'attendre que le Lecteur soit dispensé d'un certain degré d'attention : on ne fera jamais un livre de Mathématiques qui puisse être lu comme on lit un livre d'Histoire.

Je ne suppose d'autre connoissance à mon

Lecteur, que celle des noms des nombres & quelques autres idées auſſi familieres ſur leſquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales. Je paſſe de-là aux quatre opérations fondamentales, dont je donne le procédé, & dont j'explique la nature & les principes de maniere à en faciliter l'application aux opérations plus compoſées qui en dépendent. A la ſuite de ces opérations, j'en indique quelques uſages. Les fractions ſont traitées à peu-près de la même maniere.

Les nombres complexes dont le calcul ſuppoſe, à la rigueur, la connoiſſance des fractions, ſuccédent à celles-ci. Quoique je n'aie pas parlé du Toiſé, les regles que j'ai établies, ne le renferment pas moins; mais la connoiſſance de la nature des unités des facteurs & du produit, appartenant à la Géométrie, j'ai différé, pour cette raiſon, d'en parler, juſqu'à ce tems.

Quoique je ne déſapprouve pas qu'on emprunte d'une ſcience, les notions qui peuvent faciliter celle que l'on traite (quelque ſubordination qu'on ait d'ailleurs coutume de mettre entre ces deux ſciences), néanmoins je penſe qu'on ne doit prendre ce parti, que lorſqu'il ne s'en offre pas de plus ſimples. Comme l'Arithmétique m'a paru fournir des reſſources ſuffiſantes pour l'explication des opérations de la racine quarrée & de la racine cubique, je n'ai pas été puiſer ailleurs que dans les principes mêmes de cette ſcience.

Ce que j'expofe des Rapports, Proportions & Progreffions, quoique court, me paroît renfermer ce qui nous fera néceffaire pour les trois Parties qui doivent fuivre. Cependant, comme nous pouvons, fans nous écarter de la loi que nous nous fommes impofée, revenir fur quelques propriétés des progreffions, que quelques Lecteurs pourroient défirer, nous avertiffons que nous les avons réfervées pour application de l'Algebre.

Les logarithmes font d'un trop grand ufage dans la pratique de la Navigation, pour que nous n'ayons pas dû nous en occuper fpécialement. Auffi après avoir expofé la nature, la formation & ceux des ufages de ces nombres, que nous pouvions expofer fans anticiper fur aucune autre fcience, nous avons donné les moyens d'étendre, dans le befoin, les fecours qu'on peut tirer des tables ordinaires.

Quoiqu'on puiffe faire un grand nombre d'applications de l'Arithmétique à la Navigation, ce n'eft cependant pas dans l'Arithmétique même qu'elles peuvent trouver leur place, parce qu'elles fuppofent prefque toutes, au moins la Géométrie. Néanmoins dans le nombre des applications que nous avons données, nous avons pris quelques exemples dans le métier même. A mefure que nous avancerons, elles deviendront & plus nombreufes & plus importantes : on en trouvera d'ailleurs un très-grand nombre dans le *Traité de Navigation* qui forme la fuite de ce Cours.

AVERTISSEMENT.

Les nombres que l'on trouve entre deux parentheſes, dans pluſieurs endroits de ce Livre, ſont deſtinés à indiquer à quel numéro on doit aller chercher la démonſtration de la propoſition ſur laquelle on s'appuie dans ces endroits. A l'égard des numéros, ils ſont au commencement des à lineâ.

Ce que l'on trouvera en petit caracteres, renferme les objets qui ne ſont pas d'obligation dans le Cours d'Études des Gardes du Pavillon & de la Marine.



TABLE DES MATIERES.

Notions préliminaires sur la nature & les différentes especes de Nombres. Pag. 1
De la Numération & des Décimales. 3
Des Opérations de l'Arithmétique. 15
De l'Addition des Nombres entiers & des parties décimales. 16
De la Soustraction des Nombres entiers & des parties décimales. 20
De la Preuve de l'Addition & de la Soustraction. 26
De la Multiplication. 28
De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre. 33
De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres. 36
De la Multiplication des parties décimales. 40
Quelques usages de la Multiplication. 45
De la Division des Nombres entiers & des parties Décimales. 47

De la Division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un. 49
De la Division par un nombre de plusieurs chiffres. 55
Moyen d'abréger la Méthode précédente. 62
De la Division des Parties décimales. 65
Preuve de la Multiplication & de la Division. 73
Preuve par 9. 75
Quelques usages de la Regle précédente. 78
Des Fractions. 80
Des Entiers considérés sous la forme de Fraction. 83
Des changemens qu'on peut faire subir aux Fractions, sans en changer la valeur. 85
Réduction des Fractions à un même dénominateur. 86
Réduction des Fractions à leur plus simple expression. 89
Différentes manieres dont on peut envisager une Fraction, & conséquences qu'on peut en tirer. 93
Des Opérations de l'Arithmétique sur les Fractions. 95
De l'Addition des Fractions. ibid.
De la Soustraction des Fractions. 96
De la Multiplication des Fractions. 97

De la Division des Fractions. 99
Quelques applications des Regles précédentes. 101
Des Nombres complexes. 105
Table des Unités de quelques especes, & caracteres par lesquels on représente ces différentes unités. 106
Additions des Nombres complexes. 107
Soustraction des Nombres complexes. 109
Multiplication des Nombres complexes. 110
Division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe. 120
Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe. 124
De la formation des Nombres quarrés & de l'extraction de leur racine. 127
De la formation des Nombres cubes & de l'extraction de leur racine. 147
Des Raisons, Proportions & Progressions, & de quelques Regles qui en dépendent. 163
Propriétés des Proportions Arithmét. 169
Propriétés des Proportions Géométriques. 171
Usages des Propositions précédentes. 182
De la Regle de Trois *directe & simple.* 183
De la Regle de Trois *inverse & simple.* 187
De la Regle de Trois *composée.* 190
De la Regle de Société. 193
Remarque au sujet de la Regle précédente. 197

De quelques autres Regles dépendantes des Proportions. 199
De la Regle d'Alliage. 202
Des Progreſſions Arithmétiques. 204
Des Progreſſions Géométriques. 209
Des Logarithmes. 216
Table des Logarithmes des Nombres naturels depuis 1 juſqu'à 200. 221
Proprietés des Logarithmes. 225
Uſages des Logarithmes. 226
Des Nombres dont les Logarithmes ne ſe trouvent point dans les Tables. 230
Des Logarithmes dont les Nombres ne ſe trouvent point dans les Tables. 236
REMARQUE. 246





ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

Notions préliminaires ſur la nature & les différentes eſpeces de Nombres.

1. On appelle, en général, *quantité*, tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, &c. ſont des quantités. Tout ce qui eſt quantité eſt de l'objet des Mathématiques ; mais l'Arithmétique qui fait partie de ces Sciences, ne conſidere les quantités, qu'en tant qu'elles ſont exprimées en nombres.

2. L'Arithmétique eſt donc la ſcience des nombres : elle en conſidere la nature & les propriétés ; & ſon but eſt de donner

des moyens faciles, tant pour repréfenter les nombres, que pour les compofer & décompofer, ce qu'on appelle *calculer.*

3. Pour fe former une idée exacte des nombres, il faut d'abord favoir ce que l'on entend par *unité.*

4. L'unité eft une quantité que l'on prend (le plus fouvent arbitrairement) pour fervir de terme de comparaifon à toutes les quantités d'une même efpece : ainfi, lorfqu'on dit un tel corps pefe *cinq livres*, la livre eft l'unité ; c'eft la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps ; on auroit pu également prendre l'once pour unité, & alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingt.

5. Le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unité, une quantité eft compofée.

Si la quantité eft compofée d'unités entieres, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier :* & fi elle eft compofée d'unités entieres, & de parties de l'unité, ou fimplement de parties de l'unité, alors le nombre eft dit *fractionnaire* ou *fraction ; trois & demi* font un nombre fractionnaire : *trois quarts* font une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce fans dé-

ſigner l'eſpece des unités, comme quand on dit ſimplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abſtrait*; & lorſqu'on énonce en même tems l'eſpece des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent tonneaux*, on l'appelle *nombre concret*.

Nous définirons les autres eſpeces de nombres à meſure qu'il en ſera queſtion.

De la Numération & des Décimales.

7. La numération eſt l'art d'exprimer tous les nombres, par une quantité limitée de noms & de caracteres. Ces caracteres s'appellent *chiffres*.

Nous nous diſpenſerons de donner ici les noms des nombres; c'eſt une connoiſſance familiere à tout le monde.

Quant à la maniere de repréſenter les nombres par des chiffres, pluſieurs raiſons nous engagent à en expoſer les principes.

8. Les caracteres dont on fait uſage dans la numération actuelle, & les noms des nombres qu'ils repréſentent, ſont tels qu'on les voit ici.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zéro	un	deux	trois	quatre	cinq	ſix	ſept	huit	neuf

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caracteres, on est convenu que de dix unités on en feroit une seule, à laquelle on donneroit le nom de *dixaine*, & que l'on compteroit par dixaines, comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compteroit deux dixaines, trois dixaines, &c. jusqu'à neuf : que pour représenter ces nouvelles unités, on emploieroit les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les en distingueroit par la place qu'on leur feroit occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines & quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines & point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui marque qu'il n'y a point d'unités simples, & détermine le chiffre 6, à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle ; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre

dix fois plus grand que s'il étoit ſeul.

10. Depuis 99, on peut compter juſqu'à *neuf cens quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention ſemblable. De dix dixaines, on compoſera une ſeule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent ; on comptera ces centaines depuis un juſqu'à neuf, & on les repréſentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainſi pour marquer *huit cens cinquante-neuf* qui contiennent huit centaines, cinq dixaines, & neuf unités, on écrira 859. Si l'on avoit *huit cens neuf* qui contiennent huit centaines, point de dixaines, & neuf unités, on écriroit 809 ; c'eſt-à-dire, que l'on mettroit un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquoient auſſi, on mettroit deux zéros ; ainſi pour marquer *huit cens*, on écriroit 800.

11. Remarquons encore, qu'en vertu de cette convention, un chiffre ſuivi de deux autres ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il étoit ſeul.

12. Depuis *neuf cens quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter par le même artifice, juſqu'à *neuf mille neuf cens quatre-*

vingt-dix-neuf, en formant de dix centaines, une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille, comptant ces unités comme ci-devant, & les repréſentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainſi, pour marquer *ſept mille huit cens cinquante-neuf*, on écrira 7859; pour marquer *ſept mille neuf*, on écrira 7009; & pour *ſept mille*, on écrira 7000; où l'on voit qu'un chiffre ſuivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il étoit ſeul.

13. En continuant ainſi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une ſeule unité, & de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés vers la gauche, on parvient à exprimer d'une maniere uniforme & avec dix caracteres ſeulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la penſée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms ſuivans, en partant de la droite, *unités*, *mille*, *millions*,

billions, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *ſextillions*, &c. Le premier chiffre de chaque tranche, (en partant toujours de la droite) aura le nom de la tranche; le ſecond celui de dixaines, & le troiſieme celui de centaines.

Ainſi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche, comme ſi elle étoit ſeule, & l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche: par exemple, pour énoncer le nombre ſuivant:

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités
23,	456,	789,	234,	565,	456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cens cinquante-ſix *trillions*, ſept cens quatre-vingt-neuf *billions*, deux cens trente-quatre *millions*, cinq cens ſoixante & cinq *mille*, quatre cens cinquante-ſix *unités*.

15. De la numération que nous venons d'expoſer, & qui eſt purement de convention, il réſulte qu'à meſure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre eſt compoſé, ſont de dix en dix fois plus grandes, & que par conſéquent pour rendre un nombre, dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il ſuffit de mettre à la ſuite du chiffre de ſes unités, un, deux,

trois, &c. zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manieres de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujettisse pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, &c.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même, pourvu qu'on puisse mesurer les quantités qu'on a dessein de mesurer ; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue dans ces sortes de divisions, c'est de rendre les calculs le plus commodes qu'il sera possible ; c'est pour cette raison, qu'au lieu de partager d'abord l'unité en un grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites, on ne la partage d'abord qu'en un certain nombre de parties, & qu'on subdivise celles-ci en d'autres, & ces nouvelles, encore en d'autres plus petites. C'est ainsi que dans les monnoies on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *sols*, le sol en 12

parties qu'on appelle *deniers*. De même dans les mesures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, &c. ensorte que dans le premier cas on compte par vingtaines & par douzaines, dans le second, par deuxaines & par huitaines, &c.

18. Un nombre qui est composé de parties rapportées, ainsi, à différentes unités, est ce qu'on appelle un nombre *complexe*, & par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espece d'unités, s'appelle *nombre incomplexe*. 8# ou 8 livres sont un nombre incomplexe. 8# 17^{s} 8^{d} ou 8 livres 17 sols 8 deniers, sont un nombre complexe.

19. Chaque art subdivise à sa maniere l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celles de la livre; celles de la livre, différentes de celles du jour, de l'heure; celles-ci différentes de celles du marc, & ainsi de suite : nous les ferons connoître, lorsque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions & subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales, c'est-à-dire, en

partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, eſt inconteſtablement la plus commode dans les calculs. Elle eſt fort en uſage dans la pratique des Mathématiques ; la formation & le calcul des décimales ſont abſolument les mêmes que pour les nombres ordinaires où entiers : nous allons les faire connoître.

21. Pour évaluer en décimales les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle ſoit, livres, toiſes, &c. eſt compoſée de 10 parties, comme on imagine la dixaine compoſée de dix unités ſimples, où comme on imagine la livre compoſée de 20 ſols. Ces nouvelles unités, par oppoſition aux dixaines, ſont nommées *dixiemes* ; on les repréſente par les mêmes chiffres que les unités ſimples ; & comme elles ſont dix fois plus petites que celles-ci, on les place à la droite du chiffre qui repréſente les unités ſimples.

Mais pour prévenir l'équivoque, & ne point donner lieu de prendre ces dixiemes pour des unités ſimples, on eſt convenu en même tems de fixer, une fois pour toutes, la place des unités, par une marque particuliere ; celle qui eſt le plus en uſage,

eſt une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui repréſente les unités, ou, ce qui eſt la même choſe, entre les unités & les *dixiemes*; ainſi pour marquer *vingt-quatre unités & trois dixiemes*, on écrira 24, 3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les *dixiemes*, comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petite que les *dixiemes*, & par la même raiſon d'analogie, les placer à la droite des *dixiemes*. Ces nouvelles unités dix fois plus petites que les *dixiemes*, ſeront cent fois plus petites que les unités principales, & pour cette raiſon ſeront nommées *centiemes*. Ainſi pour marquer *vingt-quatre unités*, *trois dixiemes & cinq centiemes*, on écrira 24, 35.

23. Concevons pareillement les *centiemes*, comme formés de dix parties; ces parties ſeront mille fois plus petites que l'unité principale, & pour cette raiſon ſeront nommées *milliemes*; & comme dix fois plus petites que les *centiemes*, on les placera à la droite de celles-ci.

En continuant de ſubdiviſer ainſi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera ſucceſſivement des *dix-milliemes*, *cent-milliemes*, *millioniemes*, *dix-*

millioniemes, cent-millioniemes, billioniemes, &c. & qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés ſur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité, que nous venons de décrire, ſont ce que l'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la maniere de les énoncer, elle eſt la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui ſont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même maniere; mais on ajoute, à la fin, le nom des unités décimales de la derniere eſpece; ainſi pour énoncer ce nombre 34, 572, on diroit trente-quatre unités & cinq cens ſoixante & douze *milliemes* ; ſi c'étoient des toiſes, par exemple, on diroit trente-quatre toiſes & cinq cens ſoixante & douze *milliemes* de toiſe.

La raiſon en eſt facile à appercevoir, ſi l'on fait attention que dans le nombre 34,572 le chiffre 5 peut indifféremment être rendu ou par cinq *dixiemes*, ou par cinq cens *milliemes*, puiſque le *dixieme* (22) valant 10 *centiemes*, & le *centieme* (23) valant 10 *milliemes*, le *dixieme* contiendra dix fois dix *milliemes*, ou 100 *milliemes* ; ainſi, les cinq dixiemes valent

1570
10

500 *milliemes*. Par une raiſon ſemblable, le chiffre 7 pourra s'énoncer en diſant ſoixante & dix *milliemes*, puiſque (23) chaque *centieme* vaut 10 *milliemes*.

26. A l'égard de l'eſpece des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement en comptant ſucceſſivement de gauche à droite ſur chaque chiffre depuis la virgule, le noms ſuivans . . . . . . *dixiemes*, *centiemes*, *milliemes*, *dix-milliemes*, &c.

27. Si l'on n'avoit point d'unités entieres, mais ſeulement des parties de l'unité, on mettroit un zéro pour tenir la place des unités; ainſi pour marquer 125 *milliemes*, on écriroit 0, 125. Si l'on vouloit marquer 25 *milliemes*, on écriroit 0, 025 en mettant un zéro entre la virgule & les autres chiffres, tant pour marquer qu'il n'y a point de *dixiemes*, que pour donner aux parties ſuivantes leur véritable valeur. Par la même raiſon, pour marquer 6 *dix-milliemes*, on écriroit 0, 0006.

28. Examinons, maintenant, les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puiſque la virgule détermine la place des unités, & que tous les autres chiffres

ont des valeurs dépendantes de leurs distances à cette même virgule; si l'on avance la virgule d'une, deux, trois, &c. places sur la gauche, on rend le nombre, 10, 100, 1000, &c. fois plus petit; & au contraire on le rend 10, 100, 1000, &c. fois plus grand, si l'on recule la virgule d'une, deux, trois, &c. places sur la droite.

En effet, si l'on a 4327, 5264; & qu'en avançant la virgule d'une place sur la gauche, on écrive 432, 75264, il est visible que les mille du premier nombre sont des centaines dans le nouveau; les centaines, sont des dixaines; les dixaines, des unités; les unités, des dixiemes; les dixiemes, des centiemes, & ainsi de suite. Donc chaque partie du premier nombre est devenue dix fois plus petite par ce déplacement. Si au contraire, en reculant la virgule d'une place sur la droite, on eût écrit 43275, 264, les mille du premier nombre se trouveroient changés en dixaines de mille, les centaines en mille, les dixaines en centaines, les unités en dixaines, les dixiemes en unités, & ainsi de suite. Donc le nouveau nombre est 10 fois plus grand que le premier.

29. Un raiſonnement ſemblable fait voir qu'en avançant la virgule ſur la gauche, de deux ou de trois places on rendroit le nombre, 100 ou 1000 fois plus petit, & au contraire, 100 ou 1000 fois plus grand, en reculant la virgule de deux ou de trois places ſur la droite.

30. La derniere obſervation que nous ferons ſur les décimales, eſt qu'on n'en change point la valeur en mettant à la ſuite du dernier chiffre décimal, tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainſi 43, 25 eſt la même choſe que 43, 250, ou que 43, 2500 ou que 43, 25000, &c.

Car chaque *centieme* valant 10 *milliemes* ou 100 *dix-milliemes*, &c. les 25 *centiemes* vaudront 250 *milliemes* ou 2500 *dix-milliemes*, &c. en un mot, c'eſt la même choſe que lorſqu'au lieu de dire 25 piſtoles, on dit 250 livres, ou que lorſqu'au lieu de dire 25 quintaux, on dit 2500 livres.

Des opérations de l'Arithmétique.

31. Ajouter, ſouſtraire, multiplier, & diviſer, ſont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur les

nombres ſe réduiſent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il eſt donc important de ſe les rendre familieres, & d'en bien ſaiſir l'eſprit.

32. Le but de l'Arithmétique eſt, comme nous l'avons déja dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens conſiſtent à réduire le calcul des nombres les plus compoſés, à celui de nombres plus ſimples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres poſſible. C'eſt ce qu'il s'agit d'expoſer actuellement.

De l'Addition des Nombres entiers & des Parties décimales.

33. Exprimer la valeur totale de pluſieurs nombres, par un ſeul, eſt ce qu'on appelle *faire une addition.*

Quand les nombres qu'on ſe propoſe d'ajouter n'ont qu'un ſeul chiffre, on n'a pas beſoin de regle; mais lorſqu'ils ont pluſieurs chiffres, on trouve leur valeur totale qu'on appelle *ſomme*, en obſervant la regle ſuivante.

Ecrivez les uns ſous les autres, tous les

les nombres proposés ; de maniere que les chiffres des unités de chacun, soient dans une même colonne verticale ; qu'il en soit de même des dixaines, de même des centaines, &c, soulignez le tout.

Ajoutez d'abord tous les nombres qui sont dans la colonne des unités ; si la somme ne passe pas 9, écrivez-la au-dessous ; si elle surpasse neuf, elle renfermera des dixaines ; n'écrivez au-dessous, que l'excédent du nombre des dixaines : comptez ces dixaines pour autant d'unités, & ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante ; observez à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même regle qu'à l'égard de la premiere, & continuez ainsi de colonne en colonne, jusqu'à la derniere, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Eclaircissons cette regle par des exemples.

EXEMPLE I.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023 : j'écris ces deux nombres comme on le voit ici. 54925

2023

56948 somme.

Et après avoir fouligné le tout, je commence par les unités, en difant 5 & 3 font 8 que j'écris fous cette même colonne.

Je paffe à celle des dixaines, dans laquelle je dis 2 & 2 font 4, que j'écris au-deffous.

A la colonne des centaines, je dis 9 & 0 font 9, que j'écris fous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis 4 & 2 font 6, que j'écris fous cette colonne.

Enfin dans la colonne des dixaines de mille, je dis 5 & rien font 5, que j'écris de même au-deffous.

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, eft la fomme des deux nombres propofés, puifqu'il en renferme les unités, les dixaines, les centaines, les mille, & les dixaines de mille, que nous avons raffemblées fucceffivement.

EXEMPLE II.

On demande la fomme des quatre nombres fuivans... 6903, 7854, 953, 7327: je les écris comme on les voit ici.

$$\begin{array}{r} 6903 \\ 7854 \\ 953 \\ 7327 \\ \hline 23037 \end{array}$$ fomme.

Et en commençant, comme ci-dessus, par la droite, je dis 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 7 font 17; j'écris les 7 unités sous la premiere colonne, & je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dixaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis; 1 que je retiens & 0 font 1, & 5 font 6, & 5 font 11, & 2 font 13; j'écris 3 sous la colonne actuelle, & je retiens, pour la dixaine, une unité que j'ajoute à la colonne suivante, en disant une & 9 font 10, & 8 font 18, & 9 font 27, & 3 font 30, je pose 0 sous cette colonne, & je retiens, pour les trois dixaines, trois unités que j'ajoute à la colonne suivante, en disant pareillement, 3 & 6 font 9, & 7 valent 16, & 7 font 23; j'écris 3 sous cette colonne. & comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance, d'une place, les deux dixaines qui appartiendroient à la colonne suivante, s'il y en avoit une. Le nombre 23037 est la somme des quatre nombres proposés.

34. S'il y a des parties décimales; comme elles se comptent, ainsi que les autres nombres, par dixaines, à mesure

qu'on avance de droite à gauche ; la regle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre dans une même colonne.

Ainsi, si on propose d'ajouter les trois nombres 72, 957.. 12, 8... 124, 03, j'écrirai....... 72, 957

12, 8

124, 03

209, 787 somme.

En suivant la regle ci-dessus, j'aurai 209, 787 pour la somme.

De la Soustraction des Nombres entiers & des Parties décimales.

35. La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre, d'un autre nombre. Le résultat de cette opération s'appelle *reste* ou *excès* ou *différence*.

Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher, au-dessous de l'autre, de la même maniere que dans l'addition ; & ayant souligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur, de son correspondant supérieur ; c'est-à-dire,

les unités des unités, les dixaines des dixaines, &c. on écrira chaque reste, au-dessous, dans le même ordre, & zéro lorsqu'il ne restera rien.

Lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoutera à celui-ci dix unités qu'on aura en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison, être regardé comme moindre d'une unité, dans l'opération suivante.

EXEMPLE I.

On propose de retrancher 5432 de 8954. J'écris ces deux nombres comme il suit.

$$\begin{array}{r} 8954 \\ 5432 \\ \hline 3522 \end{array} \text{ reste.}$$

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis 2 ôté de 4, il reste 2 que j'écris au-dessous : puis, passant aux dixaines, je dis 3 ôté de 5, il reste 2 que j'écris sous les dixaines. A la troisieme colonne, je dis 4 ôté de 9, il reste 5 que j'écris sous cette colonne. Enfin à la

quatrieme, je dis 5 ôté de 8, il reste 3 que j'écris sous 5, & j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987 de 27646.

On écrira. 27646
7987
19659 reste.

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6, dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, & on dira 7 ôté de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7.

Passant aux dixaines, on ne dira plus 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 seulement, parce que l'emprunt qu'on a fait, a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3, dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité sur le chiffre 6 de la gauche ; & on dira 8 ôté de 13, il reste 5 qu'on écrira sous 8. Passant à la troisieme colonne, on dira de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15, (en empruntant comme ci-dessus) ; il reste 6 qu'on écrira sous 9.

A la quatrieme colonne, on dira, par

la même raiſon, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reſte 9 qu'on écrira ſous 7; & comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquieme colonne, on écrira ſous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité ſur ce 2, mais ſeulement 1, & on aura 19659 pour le reſte.

36. Si le chiffre ſur lequel on doit faire l'emprunt, étoit un zéro, l'emprunt ſe feroit, non pas ſur ce zéro, mais ſur le premier chiffre ſignificatif qui viendroit après; or quoique ce ſoit, alors, emprunter 100 ou 1000 ou 10000, ſelon qu'il y a un, deux ou trois zéros conſécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-deſſus; c'eſt-à-dire, qu'on ajoutera ſeulement 10 au chiffre pour lequel on emprunte, & comme ces dix ſont cenſés pris ſur les 100 ou 1000, &c. qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou les 990, &c. qui reſtent, on comptera les zéros ſuivans pour autant de neuf; c'eſt ce que l'exemple ci-après va éclaircir.

EXEMPLE III.

	99
Si de	20064
on veut retrancher . . .	17489
	2575 reste.

On dira d'abord, 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant) il reste 5. Puis pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, & qu'il n'est pas possible non plus d'"emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2, une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opere. De ce mille on ne prendra que 10 unités qu'on ajoutera à 5, & on dira 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que 10 unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros ; ce qui revient au même que de compter chaque zéro, comme s'il valoit 9 : ainsi l'on dira 4 ôté de 9, reste 5 ; puis 7 ôté de 9, reste 2, & enfin 1 ôté de 1, il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer,

on ſuivra abſolument la même regle ; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette regle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres propoſés, en mettant un nombre ſuffiſant de zéros à la ſuite de celui qui a le moins de décimales ; cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (30).

EXEMPLE IV.

De 5403, 25
on veut ôter . . . 385, 6532

Je mets deux zéros à la ſuite des décimales du nombre ſupérieur ; après quoi, j'opere ſur les deux nombres ainſi préparés, préciſément ſelon l'énoncé de la regle donnée pour les nombres entiers,

5403,	2500
385,	6532
5017,	5968 reſte.

& je trouve pour reſte . . . . 5017, 5968.



De la preuve de l'Addition & de la Souſtraction.

38. Ce qu'on appelle preuve d'une opération arithmétique, eſt une autre opération que l'on fait pour s'aſſurer de l'exactitude du réſultat de la premiere.

La preuve de l'addition ſe fait en ajoutant de nouveau, par parties, mais en commençant par la gauche, les ſommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la premiere colonne, de la partie qui lui répond dans la ſomme inférieure : on écrit au-deſſous, le reſte, qu'on réduit par la penſée en dixaines, pour le joindre au chiffre ſuivant de cette même ſomme, & du total on retranche encore la totalité de la colonne ſupérieure ; on continue ainſi, juſqu'à la derniere colonne, dont la totalité étant retranchée, ne doit laiſſer aucun reſte.

Ainſi, ayant trouvé ci-deſſus que les quatre nombres

	6903
	7854
	953
	7327
ont pour ſomme	23037
	3110

Pour vérifier ce réſultat, j'ajoute les mêmes nombres, en commençant par la gauche ; & je dis 6 & 7 font 13, & 7 font 20, leſquels ôtés de 23, il reſte 3 ou 3 dixaines, qui, avec le chiffre ſuivant zéro, font 30. Je paſſe à la ſeconde colonne, & je dis 9 & 8 font 17, & 9 font 26, & 3 font 29 que j'ôte de 30; il reſte 1 ou une dixaine, qui, jointe au chiffre ſuivant 3, fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troiſieme colonne, en diſant 5 & 5 font 10, & 2 font 12, qui ôtés de 13, il reſte 1 ou une dixaine, laquelle, jointe au chiffre ſuivant 7, fait 17 ; j'ajoute pareillement tous les nombres de la derniere colonne, en diſant 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 7 font 17, qui ôtés de 17, il ne reſte rien : d'où je conclus que la premiere opération eſt exacte.

On eſt fondé à conclure que la premiere opération a été bien faite, lorſqu'après cette preuve il ne reſte rien, parce qu'ayant ôté ſucceſſivement tous les mille, toutes les centaines, toutes les dixaines & toutes les unités dont on avoit compoſé la ſomme, il faut qu'à la fin il ne reſte rien.

39. La preuve de la souſtraction ſe fait en ajoutant le reſte trouvé par l'opération, avec le nombre retranché; ſi la premiere opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché: ainſi je vois que dans le troiſieme exemple que nous avons donné ci-deſſus, l'opération a été bien faite, parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché), avec le reſte 2565, je reproduis 20054, nombre dont on a retranché.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'eſt prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'eſt prendre trois fois le nombre 4.

41. Le nombre qu'on doit multiplier, s'appelle le *multiplicande ;* celui par lequel on doit multiplier, s'appelle le *multiplicateur ;* & le réſultat de l'opération s'appelle *produit.*

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue ; mais nous avertiſſons expreſſément que nous ne l'emploierons que pour déſigner le réſultat de la multiplication.

Le multiplicande & le multiplicateur ſe nomment auſſi les *facteurs* du produit, ainſi 3 & 4 ſont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourroit faire cette opération en écrivant le multiplicande autant fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, & faiſant enſuite l'addition ; par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourroit écrire,

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

Et la ſomme 21 réſultante de cette addition ſeroit le produit.

Mais lorſque le multiplicateur eſt tant ſoit peu conſidérable, l'opération devient fort longue : ce que nous appellons proprement multiplication, eſt la méthode de parvenir à ce même réſultat, par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considere les nombres que d'une maniere abstraite, c'est-à-dire, sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu, lequel des deux nombres proposés pour la multiplication, on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur; par exemple, si on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4, le produit sera toujours 12: en effet 3 fois 4 ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4, & 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1; or il est évident que 1 fois 4 & 4 fois 1 sont la même chose; & on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorsque par l'énoncé de la question, le multiplicateur & le multiplicande sont des nombres concrets, il importe de distinguer le multiplicande du multiplicateur: cette attention est principalement nécessaire dans la multiplication des nombres complexes, dont nous parlerons par la suite.

Au reste, cela est toujours aisé à distinguer: la question qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connoître quelle est la quantité qu'il s'agit

de répéter plusieurs fois, c'est-à-dire, le multiplicande ; & quelle est celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande, c'est-à-dire, quel est le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur est destiné à marquer combien de fois on doit prendre le multiplicande, il est toujours un nombre abstrait : ainsi, quand on demande ce que doivent coûter 52 toises de bois, à raison de 36 livres la toise ; on voit que le multiplicande est 36 livres, qu'il s'agit de répéter 52 fois ; soit que ce 52 marque des toises, ou toute autre chose.

47. Le produit qui est formé de l'addition répétée du multiplicande, aura donc des unités de même nature que le multiplicande *.

Après cette petite digression sur la nature des unités du produit & de ses facteurs, revenons à la méthode pour trouver ce produit.

* Nous n'en exceptons pas même la multiplication géométrique, dont nous ne parlerons qu'en Géométrie, comme cela nous paroît assez naturel. Les unités du multiplicateur n'y sont jamais que des unités abstraites, comme dans toute autre multiplication.

48. Les regles de la multiplication des nombres les plus composés, se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chiffre, par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver soi-même le produit des nombres exprimés par un seul chiffre, en ajoutant successivement un même nombre à lui-même. On peut aussi, si on le veut, faire usage de la Table suivante, qu'on attribue à Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La premiere bande de cette table se forme en ajoutant 1 à lui-même successivement.

La seconde, en ajoutant 2 de même.

La troisieme, en ajoutant 3, & ainsi de suite.

49. Pour trouver par le moyen de cette table, le produit de deux nombres exprimés par un ſeul chiffre chacun, on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande ſupérieure; & en partant de ce nombre, on deſcendra verticalement juſqu'à ce qu'on ſoit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la premiere colonne. Le nombre ſur lequel on ſe ſera arrêté, ſera le produit; ainſi, pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9, je deſcends depuis 9, pris dans la premiere bande, juſquès vis-à-vis de 6 pris dans la premiere colonne; le nombre ſur lequel je m'arrête, eſt 54; par conſéquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour paſſer à la multiplication des nombres exprimés par pluſieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un ſeul chiffre.

50. Ecrivez le multiplicateur, qu'on ſuppoſe ici d'un ſeul chiffre, ſous le multiplicande; peu importe ſous quel chiffre,

mais pour fixer les idées, ſuppoſons que ce ſoit ſous le chiffre des unités.

Multipliez d'abord le nombre des unités par votre multiplicateur ; & ſi le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-deſſous ; s'il contient des unités & des dixaines, écrivez ſeulement les unités, & comptant les dixaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines du multiplicande ; & au produit ajoutez les unités que vous avez retenues ; écrivez le tout au-deſſous, s'il peut être marqué par un ſeul chiffre, ſinon n'écrivez que les unités de ce produit ; & retenez-en les dixaines, qui ſont des centaines, pour les ajouter au produit ſuivant qui ſera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier ſucceſſivement, ſuivant la même regle, tous les chiffres du multiplicande ; la ſuite des chiffres que vous aurez écrits, marquera le produit.

EXEMPLE.

On demande combien 2864 toiſes valent de pieds. La toiſe eſt de 6 pieds.

La queſtion ſe réduit à prendre ſix pieds 2864 fois, ou ce qui revient au même (44) à prendre 2864 pieds, 6 fois.

J'écris donc . . . . 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.

17184 . . produit.

Et je dis, en commençant par les unités; 6 fois 4 font 24; j'écris 4, & je retiens 2 unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 font 36, & deux que j'ai retenues font 38; je poſe 8 & je retiens 3.

3°. 6 fois 8 font 48, & 3 que j'ai retenues font 51; je poſe 1 & je retiens 5.

4°. 6 fois 2 font 12, & 5 que j'ai retenues font 17 que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 eſt le produit demandé, ou le nombre de pieds que valent les 2864 toiſes, puiſqu'il renferme 6 fois les 4 unités; 6 fois les 6 dixaines; 6 fois les 8 centaines, & 6 fois les 2 mille; & par conſéquent 6 fois le nombre 2864.



De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, il faut faire successivement, avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la droite ; ainsi on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande, par le chiffre des unités du multiplicateur ; puis par celui des dixaines ; & l'on écrira ce second produit sous le premier ; mais comme il doit être un nombre de dixaines, puisque c'est par des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit, sous les dixaines, & les autres chiffres, toujours en avançant sur la gauche.

Le troisieme produit, qui se fera en multipliant par les centaines, se placera de même sous le second, mais en avançant encore d'une place : on suivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, & la somme sera le produit total.

EXEMPLE.

On propoſe de multiplier 65487
par 6958

523896
327435
589383
392922
455658546 prod.

Je multiplie d'abord 65487, par le nombre 8 des unités du multiplicateur, & j'écris ſucceſſivement ſous la barre, les chiffres du produit 523896 que je trouve en ſuivant la regle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie de même le nombre 65487, par le ſecond chiffre 5 du multiplicateur, & j'écris le produit 327435, ſous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 ſous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troiſieme chiffre 9, j'écris le produit 589383, ſous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3, au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie eſt un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487, par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, & j'écris le produit 392922, sous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que son premier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille : enfin j'ajoute tous ces produits, & j'ai 455658546 pour le produit de 65487 multiplié par 6958, c'est-à-dire, pour la valeur de 65487 pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la premiere opération, 50 fois par la seconde, 900 fois par la troisieme, & 6000 fois par la quatrieme.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux étoient terminés par des zéros, on abrégeroit l'opération, en multipliant comme si ces zéros n'y étoient point ; mais on les mettroit ensuite tous à la suite du produit.

EXEMPLE.

On propose de multiplier 6500
par 350

325
195

2275000

Je multiplie ſeulement 65 par 35, & je trouve 2275, à côté duquel j'écris les trois zéros qui ſe trouvent, en tout, à la ſuite du multiplicande & du multiplicateur.

En effet, le multiplicande 6500 repréſente 65 centaines ; ainſi quand on multiplie 65, on doit ſous-entendre que le produit eſt des centaines. Pareillement, le multiplicateur 350, marque 35 dixaines ; ainſi quand on multiplie par 35, on doit ſous-entendre que le produit ſera des dixaines ; il ſera donc des dixaines de centaines, c'eſt-à-dire des mille ; il doit donc avoir 3 zéros : on appliquera un raiſonnement ſemblable à tous les autres cas.

53. Lorſqu'il ſe trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donneroit que des zéros, on ſe diſpenſera d'écrire ceux-ci dans le produit ; & paſſant tout de ſuite à la multiplication par le premier chiffre ſignificatif qui vient après ces zéros, on en avancera le produit ſur la gauche d'autant de place plus une, qu'il y a de zéros qui ſe ſuivent dans le multiplicateur, c'eſt-à-dire, de deux places s'il y a un zéro, de trois s'il y en a deux.

EXEMPLE.

Si l'on a	42052
à multiplier par . . .	3006
	252312
	126156
	126408312

Après avoir multiplié par 6, & écrit le produit 252312, on multipliera tout de ſuite par trois; mais on écrira le produit 126156, de maniere qu'il marque des mille, il faudra donc le reculer de trois places, c'eſt-à-dire, d'une place de plus qu'il n'y a de zéros interpoſés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties Décimales.

54. Pour multiplier les parties décimales, on obſervera la même regle que pour les nombres entiers, ſans faire aucune attention à la virgule; mais après avoir trouvé le produit, on en ſéparera ſur la droite par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE I.

On propose de multiplier 54,23
par. 8,3

	16269
	43384
	450, 109

Je multiplierai 5423 par 83, le produit sera 450,109; & comme il y a deux décimales dans le multiplicande, & une dans le multiplicateur, je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit, qui par-là deviendra 450,109, tel qu'il doit être.

La raison de cette regle est facile à saisir, en observant que si le multiplicateur étoit 83, le produit n'auroit en décimales que des *centiemes*, puisqu'on auroit répété 83 fois le multiplicande 54,23 dont les décimales sont des centiemes ; mais comme le multiplicateur est 8,3, c'est-à-dire, (21) dix fois plus petit que 83, le produit doit donc avoir des unités dix fois plus petites que les centiemes ; le dernier chiffre de ses décimales doit donc (23) être des *milliemes*, il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit, c'est-à-dire, autant qu'il y en a, tant dans

le multiplicande que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

EXEMPLE II.

Si on avoit	0,12
à multiplier par . . .	0,3
	0,036

On multiplieroit 12 par 3, ce qui donneroit 36 ; comme la regle prescrit de séparer ici trois chiffres, on pourroit être embarrassé à y satisfaire, puisque ce produit 36 n'en a que deux ; mais si on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme on le voit ici, interposer un zéro entre 36 & la virgule. En effet, si l'on avoit 0,12 à multiplier par 3, il est évident qu'on auroit 0,36 ; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'est-à-dire, par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'est-à-dire, des milliemes, & c'est ce qui a lieu (28) lorsqu'on écrit 0,036.

55. Comme on n'emploie ordinairement les décimales que dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un

calcul rigoureux, une approximation suffisante, mais prompte ; il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abréger l'opération lorsqu'on n'a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.

Supposons, par exemple, qu'ayant à multiplier. . . . 45,625957 par 28,635, je n'aie besoin d'avoir le produit qu'à moins d'un millieme près. J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous, c'est-à-dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant répondre le chiffre de ses unités sous la décimale immédiatement inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant, dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à la droite de celui par lequel je multiplie; & à mesure que je change de chiffre dans le multiplicateur, je porte toujours le premier chiffre du nouveau produit, sous le premier chiffre du premier. L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50 ; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espece de décimales que je me proposois d'avoir.

EXEMPLE.

Je veux multiplier . . 45,625957
par 28,635
mais je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à un millieme d'unité près.

J'écris ainsi ces deux nombres. 45,625957
53682

91251914
36500760
2737554
136875
22810
130649913

produit. 1306,499

Et si l'on avoit fait la multiplication à l'ordinaire, on auroit eu 1306,499278695 qui s'accorde avec le précédent jusqu'à la troisieme décimale, ainsi qu'on le demande.

S'il n'y avoit pas assez de chiffres décimaux dans le multiplicande, pour faire correspondre le chiffre des unités du multiplicateur, au chiffre auquel la regle prescrit de le faire correspondre, on y suppléroit en mettant des zéros.

EXEMPLE.

On doit multiplier 54,236
par.................. 532,27
& l'on veut avoir le produit à un centieme d'unités près; j'écris 54,236000

```
       54,236000
           72235
       ---------
       271180000
        16270800
         1084720
          108472
           37961
       ---------
       288681953
```

produit .....28868,20, en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux que l'on supprime, passent 50.

Pour troisieme exemple, supposons qu'on ait à .... multiplier 0,2275389¹7
par 0,5664178
& l'on ne veut avoir que 7 décimales au produit; on écrira ... 0,2275389¹7

```
    0,2275389¹7
       87146650
    -----------
       ........
      113769455
       13652334
        1365228
          91012
           2275
           1579
            176
    -----------
      128882069
```

produit....0, 1288821

Sur quelques usages de la Multiplication.

56. Nous ne nous proposons pas de faire connoître tous les usages qu'on peut faire de la multiplication. Nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voie pour les autres.

La multiplication sert à trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connoît la valeur de chacune. Par exemple, 1°. combien doivent coûter 5842 toises, à raison de 54^{tt} la toise? Il faut multiplier 54^{tt} par 5842, ou (44) 5842^{tt} par 54, on aura 315468^{tt} pour le prix total demandé. 2°. Combien 5954 pieds-cubes * d'eau pesent-ils, en supposant que le pied-cube pese 72 liv.? il faut multiplier 72℔ par 5954, ou 5954℔ par 72; on aura 428688℔ pour le poids des 5954 pieds-cubes.

57. On emploie la multiplication pour convertir des unités d'une certaine espece, en unités d'une espece plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en sols,

* Le pied-cube est une mesure d'un pied de long sur un pied de large, & sur un pied de haut, avec laquelle on évalue la capacité des corps, ainsi qu'on le verra en Géométrie.

& ceux-ci en deniers ; les toiſes en pieds ; ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes ; les jours en heures, celles-ci en minutes, ces dernieres en ſecondes ; on a ſouvent beſoin de ces ſortes de converſions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir 8^{tt} 17^{s} 7^{d} en deniers, comme la livre vaut 20^{s}, on multipliera les 8^{tt} par 20 (52), ce qui donnera 160^{s} auxquels joignant les 17^{s}, on aura 177^{s}, qu'on multipliera par 12, parce que chaque ſol vaut 12 deniers, & on aura 2124 deniers, leſquels, joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur de 8^{tt} 17^{s} 7^{d}, convertis en deniers.

Si l'on demande combien une année commune, ou 365 jours, 5 heures, 48 minutes, ou 365^{j} 5^{h} 48^{m} valent de minutes ; comme le jour eſt de 24 heures, on multipliera 24^{h} par 365, & au produit 8760^{h} on ajoutera 5^{h}, on multipliera le total 8765 par 60 (52) parce que l'heure contient 60 minutes, & on aura 525900 minutes, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

Cette converſion des parties du tems eſt utile dans quelques opérations du *Pilotage*.

58. L'abréviation dont nous avons parlé (52), peut être employée pour réduire promptement en livres un certain nombre de *tonneaux*; comme le tonneau de poids peſe 2000 livres, ſi l'on a, par exemple, 854 tonneaux, il n'y a qu'à doubler 854, & mettre les trois zéros à la ſuite du produit, on aura 1708000 pour le nombre de livres que peſent 854 tonneaux.

Avant de terminer ce qui regarde la multiplication, faiſons obſerver aux commençans, que ces expreſſions *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, &c. ſignifient la même choſe que multiplier par 2, par 3, par 4, &c.

De la Diviſion des Nombres entiers, & des Parties Décimales.

59. Diviſer un nombre par un autre; c'eſt, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le ſecond.

Le nombre qu'on doit diviſer, s'appelle

Dividende ; celui par lequel on doit divi-ſer, *Diviſeur ;* & celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviſeur, s'appelle le *Quotient.*

On n'a pas toujours pour but dans la diviſion, de ſavoir combien de fois un nombre en contient un autre ; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme ſi elle tendoit à ce but, c'eſt pourquoi on peut, dans tous les cas, la conſidérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviſeur.

Il ſuit delà, que ſi on multiplie le diviſeur par le quotient, on doit reproduire le dividende, puiſque c'eſt prendre ce diviſeur autant de fois qu'il eſt dans le dividende : cela eſt général, ſoit que le quotient ſoit un nombre entier, ſoit qu'il ſoit un nombre fractionnaire.

Quant à l'eſpece des unités du quotient, ce n'eſt ni par l'eſpece de celles du dividende, ni par l'eſpece de celles du diviſeur, ni par l'une & l'autre qu'il faut en juger ; car le dividende & le diviſeur reſtant les mêmes, le quotient qui ſera auſſi toujours le même numériquement, peut être fort différent pour la nature de ſes unités, ſelon la queſtion qui donne lieu à cette diviſion.

Par

Par exemple, s'il eſt queſtion de ſavoir combien 8₶ contiennent 4₶, le quotient ſera un nombre abſtrait qui marquera 2 fois. Mais s'il eſt queſtion de ſavoir combien pour 8₶ on fera faire d'ouvrage à raiſon de 4₶ la toiſe, le quotient ſera 2 toiſes, qui eſt un nombre concret, & dont l'eſpece n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviſeur.

Mais on voit, en même-temps, que la queſtion ſeule qui conduit à faire la diviſion dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la diviſion d'un nombre composé de pluſieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

60. L'opération que nous allons décrire ſuppoſe qu'on ſache trouver combien de fois un nombre de un ou deux chiffres contient un nombre d'un ſeul chiffre. C'eſt une connoiſſance déjà acquiſe, quand on ſait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut auſſi, pour y parvenir, faire uſage de la table que nous avons donnée ci-deſſus (48). Par exemple ſi je veux ſavoir

combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviſeur 9 dans la bande ſupérieure, & je deſcends verticalement juſqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'eſt ici 72; alors le nombre 8 qui ſe trouve vis-à-vis 72, dans la premiere colonne, eſt le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela ſuppoſé, voici comment ſe fait la diviſion d'un nombre qui a pluſieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Ecrivez le diviſeur à côté du dividende; ſéparez l'un de l'autre par un trait, & ſoulignez le diviſeur ſous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à meſure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre ſur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, ſi le premier ne contient pas le diviſeur.

Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviſeur; écrivez ce nombre de fois ſous le diviſeur.

Multipliez le diviſeur par le quotient que vous venez d'écrire, & portez le produit ſous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin retranchez le produit, de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, & vous aurez un reste.

A côté de ce reste, abaissez le chiffre suivant du dividende principal, & vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant & retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaisserez, de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende, qui suit celui que vous avez abaissé, & vous continuerez toujours de la même maniere jusqu'au dernier inclusivement.

Cette regle va être éclaircie par l'exemple suivant.

EXEMPLE.

On propose de diviser 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres comme on les voit ci après.

dividende	7 diviſeur
8769	$1252\frac{5}{7}$ quotient
7	
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrois dire en 8 mille, combien de fois 7 : mais je dis ſimplement en 8 combien de fois 7 ? Il y eſt une fois. Cet 1 eſt naturellement mille, mais les chiffres qui viendront après lui donneront ſa véritable valeur ; c'eſt pourquoi j'écris ſimplement 1 ſous le diviſeur.

Je multiplie le diviſeur 7 par le quotient 1, & je porte le produit 7 ſous la partie 8 que je viens de diviſer ; faiſant la ſouſtraction, j'ai pour reſte 1.

Ce reſte 1 eſt la partie de 8 qui n'a pas été diviſée, & eſt une dixaine à l'égard du chiffre ſuivant 7 ; c'eſt pourquoi j'abaiſſe ce même chiffre 7, à côté, & je continue

l'opération, en disant en 17, combien de fois 7 ? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la premiere opération.

Je multiplie, comme dans la premiere opération, le diviseur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver ; je porte le produit 14 sous mon dividende partiel 17, & faisant la soustraction, il me reste 3 pour la partie qui n'a pu être divisée.

A côté de ce reste 3 j'abaisse 6, troisieme chiffre du dividende, & je dis en 36 combien de fois 7 ? 5 fois : j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par 5 ; & ayant écrit ce produit 35 sous mon nouveau dividende partiel, je l'en retranche ; & il me reste 1.

Enfin à côté de ce reste 1, j'abaisse le chiffre 9 du dividende, & je dis en 19 combien de fois 7 ? 2 fois ; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7, par ce nouveau quotient 2, & ayant écrit le produit 14 sous mon dernier dividende partiel 19, j'ai pour reste 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7, autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit ; c'est-à-dire, 1252 fois, & qu'il reste 5.

A l'égard de ce reſte, nous nous contenterons pour le préſent de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'eſt-à-dire, en écrivant le diviſeur au deſſous de ce reſte, & ſéparant l'un de l'autre par un trait ; & alors on prononce *cinq ſeptiemes.* Nous expliquerons par la ſuite la nature de ces ſortes de nombres.

61. Si dans la ſuite de l'opération, quelqu'un des dividendes partiels ſe trouvoit ne pas contenir le diviſeur, on écriroit zéro au quotient, & omettant la multiplication, on abaiſſeroit tout de ſuite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel, & on continueroit la diviſion.

EXEMPLE.

Il s'agit de diviſer 14464 par 8

```
14464 |  8
 8    |------
----- | 1808
 64
 64
----
  064
   64
  ---
    0
```

Je prends ici les deux premiers chiffres

du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviſeur.

Je trouve que 14 contient 8, 1 fois, j'écris 1 au quotient; je multiplie 8 par 1, & je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reſte 6, à côté duquel j'abaiſſe le troiſieme chiffre 4 du dividende.

Je continue en diſant, en 64 combien de fois 8? huit fois; j'écris 8 au quotient, & faiſant la multiplication, j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64, il me reſte 0 à côté duquel j'abaiſſe 6, quatrieme chiffre du dividende; & comme 6 ne contient pas 8, j'écris 0 au quotient, & j'abaiſſe tout de ſuite à côté de 6 le dernier chiffre du dividende qui eſt ici 4, pour dire en 64 combien de fois 8? il y eſt 8 fois: après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication; & je retranche lé produit 64: & comme il ne reſte rien, j'en conclus que 14464 contiennent, 8, 1808 fois.

De la diviſion par un nombre de pluſieurs chiffres.

62. Lorſque le diviſeur aura pluſieurs chiffes, on ſe conduira de la maniere ſuivante. D 4

Prenez ſur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il eſt néceſſaire pour contenir le diviſeur.

Cela poſé, au lieu de chercher comme ci-devant, combien la partie du dividende que vous avez priſe, contient votre diviſeur entier, cherchez ſeulement combien de fois le premier chiffre de votre diviſeur eſt compris dans le premier chiffre de votre dividende, ou dans les deux premiers ſi le premier ne ſuffit pas; marquez ce quotient ſous le diviſeur comme ci-devant.

Multipliez ſucceſſivement, ſelon la regle donnée (50), tous les chiffres de votre diviſeur, par ce quotient, & portez à meſure, les chiffres du produit ſous les chiffres correſpondans de votre dividende partiel. Faites la souſtraction, & à côté du reſte abaiſſez le chiffre ſuivant du dividende, pour continuer l'opération de la même maniere.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples, & prévenir en même temps les cas qui peuvent cauſer quelque embarras.

EXEMPLE.

On propose de diviser 75347 par 53.

```
75347 | 53
53    |------
----- | 1421 34/53
 223
 212
-----
  114
  106
 -----
   87
   53
  -----
   34
```

Je prends seulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviseur, & au lieu de dire en 75 combien de fois 53, je cherche seulement combien les 7 dixaines de 75 contiennent le 5 dixaines de 53, c'est-à-dire, combien 7 contient 5 : je trouve une fois que j'écris au quotient.

Je multiplie 53 par 1, & je porte le produit 53 sous 75 : la soustraction faite il reste 22, à côté duquel j'abaisse le chiffre 3 du dividende, & je poursuis, en disant, pour plus de facilité, en 22

combien de fois 5, (au lieu de dire en 223 combien de fois 53); je trouve 4 fois que j'écris au quotient.

Je multiplie ſucceſſivement par 4 les deux chiffres du diviſeur, & je porte le produit 212, ſous mon dividende partiel 223; la ſouſtraction faite, j'ai pour reſte 11; j'abaiſſe à côté de ce reſte, le chiffre 4 du dividende, & je dis ſimplement, comme ci-deſſus, en 11 combien de fois 5? 2 fois; je l'écris au quotient, & je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106 que j'écris ſous le dividende partiel 114; faiſant la ſouſtraction, j'ai pour reſte 8, à côté duquel j'abaiſſe le dernier chiffre 7; je diviſe de même 87, & continuant comme ci-deſſus, je trouve 1 pour quotient, & 34 pour reſte que j'écris à côté du quotient, de la maniere qui a été indiquée plus haut (60).

63. On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviſeur entier; mais comme cette recherche ſeroit ſouvent longue & pénible, on ſe contente, comme on vient de le voir, de cherche[r] combien la partie la plus forte de ce div[i]dende contient la partie la plus forte d[u] diviſeur. Le quotient qu'on trouve p[ar]

cette voie n'eſt pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une eſtimation approchée; mais outre que cette eſtimation met preſque toujours ſur le but, & que dans les cas où elle n'y met pas, elle en écarte peu; la multiplication qui vient enſuite, ſert à redreſſer ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement. En effet, ſi le dividende partiel contenoit réellement le diviſeur trois fois, par exemple, & que par l'eſſai qu'on fait, on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il eſt facile de voir qu'en faiſant la multiplication par 4, on auroit un produit plus grand que le dividende; puiſqu'on prendroit le diviſeur plus de fois qu'il n'eſt réellement dans ce dividende, & par conſéquent la ſouſtraction deviendra impoſſible; alors on diminuera le quotient ſucceſſivement d'une, deux, &c. unités, juſqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puiſſe retrancher: au contraire, ſi l'on n'avoit mis que 2 au quotient, le reſte de la ſouſtraction ſe trouveroit plus grand que le diviſeur; ce qui prouveroit que le diviſeur y eſt encore contenu, & que par conſéquent le quotient eſt trop foible.

Au reste, on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la premiere épreuve.

EXEMPLE II.

On propose de diviser 189492 par 375.

```
        |   375
        |---------
189492  |  505 117/375
1875    |
------
  1992
  1875
   117
```

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviseur.

Je dis, ensuite, en 18 seulement, combien de fois 3 ? il y est réellement 6 fois; mais en multipliant 375 par 6, j'aurois plus que mon dividende 1894, c'est pourquoi j'écris seulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5, & après avoir écrit le produit, sous 1894, je fais la soustraction, & j'ai pour reste 19.

J'abaisse à côté de 19, le chiffre 9 du dividende; & comme 199 que j'ai alors, ne contient pas 375, je pose 0 au quotient,

& j'abaisse à côté de 199, le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992 pour lequel je dis, en 19 seulement, combien de fois 3? six fois. Mais par la même raison que ci-dessus, je n'écris au quotient, que 5: & après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reste 117.

64. Voici une réflexion qui peut servir à éviter dans un grand nombre de cas, les tentatives inutiles. On est principalement exposé à ces essais douteux, lorsque le second chiffre du diviseur est sensiblement plus grand que le premier. Dans ce cas, au lieu de chercher combien le premier chiffre du diviseur est contenu dans la partie correspondante du dividende, il faut chercher combien ce premier chiffre augmenté d'une unité, se trouve contenu dans la partie correspondante du dividende; cette épreuve sera toujours beaucoup plus approchante que la premiere.

EXEMPLE.

On propose de diviser 1832 par 288.

	288
1832	$6\frac{104}{288}$
1728	
104	

Au lieu de dire en 18 combien de fois 2 ; je dirai en 18 combien de fois 3, parce que le diviſeur 288 approche beaucoup plus de 300 que de 200, je trouve 6 qui eſt le véritable quotient, au lieu que j'aurois trouvé 9, & j'aurois par conſéquent été obligé de faire trois eſſais inutiles.

Moyens d'abréger la Méthode précédente.

65. C'eſt pour rendre la méthode plus facile à ſaiſir, que nous avons preſcrit d'écrire ſous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviſeur par le quotient; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut ſe diſpenſer d'écrire ces produits, & faire la ſouſtraction à meſure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviſeur. L'exemple ſuivant ſuffira pour faire entendre comment ſe fait cette ſouſtraction.

EXEMPLE.

On peut divifer 756984 par 932.

```
756984 |
  1138 |-----------
  2064 | 812 200/932
------
   200
------
```

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende, qui font néceffaires pour contenir le divifeur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois; c'eft pourquoi j'écris 8 au quotient; & au lieu de porter fous 7569, le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord 2 par 8, ce qui me donne 16; mais comme je ne puis ôter 16 de 9, j'emprunte fur le chiffre fuivant 6 une dixaine, qui jointe à 9 me donne 19, duquel ôtant 16, il me refte 3 que j'écris au-deffous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 fur lequel j'ai emprunté, je retiens cette unité que je vais ajouter au produit fuivant; ainfi continuant la multiplication, je dis 8 fois 3 font 24, & 1 que j'ai retenu font 25; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte fur le chiffre

ſuivant 5 du dividende, deux dixaines, qui jointes à 6, me donnent 26, deſquelles j'ôte 25, & il me reſte 1 que j'écris ſous 6; par-là j'ai tenu compte de la premiere dixaine dont j'aurois dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai, de même, compte des deux dixaines que je viens d'emprunter. Je continue donc, en diſant 8 fois 9 font 72, & 2 que j'ai empruntés font 74, leſquels ôtés de 75, il reſte 1.

J'abaiſſe à côté du reſte 113 le chiffre 8 du dividende, & je continue de la même maniere, en diſant en 11 combien de fois 9? 1 fois; puis une fois 2 fait 2, qui ôtés de 8 il reſte 6; 1 fois 3 fait 3, qui ôtés de 3, il reſte 0; 1 fois 9 eſt 9, qui ôtés de 11 il reſte 2. J'abaiſſe le chiffre 4 à côté du reſte 206, & je dis en 20 combien de fois 9? 2 fois; & faiſant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4, il reſte 0; 2 fois 3 font 6, qui ôtés de 6, il reſte 0; & enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il reſte 2.

66. Il peut arriver dans le cours de ces diviſions partielles, que le dividende contienne le diviſeur plus de 9 fois; cependant on ne doit jamais mettre plus de

de 9 au quotient; car si l'on pouvoit seulement mettre 10, ce seroit une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente, seroit faux, puisque la dixaine qu'on trouveroit dans le quotient actuel, appartiendroit à ce premier quotient.

67. Si le dividende & le diviseur étoient suivis de zéros, on pourroit en ôter à l'un & à l'autre autant qu'il y en a à la suite de celui qui en a le moins. Par exemple, pour diviser 8000 par 400, je diviserai seulement 80 par 4; car il est évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

De la Division des Parties Décimales.

68. Pour ne pas nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette regle seule.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun; (cela ne changera rien à

la valeur de ce nombre (30) ; ſupprimez la virgule dans l'un & dans l'autre, & faites l'opération comme pour les nombres entiers ; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer 12,52 par 4,3 :

J'écris	12,52	4,3
Ou plutôt . .	12,52	4,30

en complétant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviſer par 430 ; faiſant l'opération,

1252	43
392	$2\frac{392}{430}$

Je trouve 2 pour quotient, & 392 pour reſte, c'eſt-à-dire, que le quotient eſt 2 & $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on ſe propoſe quand on ſe ſert de décimales, eſt d'éviter les fractions ordinaires ; au lieu d'écrire le reſte 392 ſous la forme de fraction, comme on vient de le faire, on continueroit l'opération comme dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

```
1252 | 430
     |------
     | 2,9116
3920
 500
  700
  2700
   120
```

Après avoir trouvé le quotient, en entier, qui est ici 2, on mettra à côté du reste 392, un zéro qui, à la vérité, rendra ce reste dix fois trop grand ; on continuera de diviser par 430, & ayant trouvé qu'il faudroit mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entieres, en mettant une virgule après le 2 ; par ce moyen le 9 ne marquera plus que des dixiemes : après la multiplication & la soustraction faites, on mettra à côté du reste 50, un zéro, ce qui est la même chose que si l'on en avoit mis d'abord deux à côté du dividende, mais en mettant après 9, le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par-là sa véritable valeur, puisqu'alors il marque des centiemes; on continuera ainsi tant

qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centieme d'unité près ; en poussant jusqu'à trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millieme près, & ainsi de suite ; puisqu'on n'auroit pas pu mettre une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop foible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende & dans le diviseur ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres : c'est ce qu'il est aisé d'appercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus, le dividende 12,52, & le diviseur 4,30 ne sont autre chose que 1252 centiemes & 430 centiemes, puisque les unités entieres valent des centaines de centiemes (22); or il est clair que 1252 centiemes ne contiennent pas autrement 430 centiemes, que 1252 unités ne contiennent 430 unités ; donc la considération de la virgule est inutile quand on a completté le nombre des décimales.

69. Lorsqu'on n'a besoin de connoître le quotient d'une division, que jusqu'à un degré d'exactitude proposé, on peut abréger le calcul, par la méthode suivante. Nous supposerons, d'abord, qu'on n'a besoin de connoître ce quotient, qu'à une unité près : nous ferons voir ensuite, comment on doit appliquer la méthode pour l'avoir aussi près qu'on voudra : voici la regle.

Supprimez, sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur : faites, ensuite, la division, comme à l'ordinaire : s'il n'y a point de reste, vous mettrez à la suite du quotient, autant de zéros, que vous avez supprimé de chiffres dans le dividende. Mais s'il y a un reste, vous continuerez de diviser, non pas par le même diviseur qu'auparavant, ce qui n'est plus possible, mais par ce diviseur dont vous aurez supprimé le dernier chiffre de la droite : après cette division, vous diviserez le nouveau reste, par le diviseur précédent dont vous supprimerez le dernier chiffre sur la droite : & vous continuerez, ainsi, de diviser, en supprimant à chaque division, un chiffre sur la droite du diviseur.

EXEMPLE.

On veut avoir; à moins d'une unité près, le quotient de 8789236487 divivisé par 64423. Je supprime les quatre derniers chiffres de la droite du dividende, & je divise 878923, par le diviseur proposé 64423.

878923	64423
234693	136430
41424 . .	. 6442
2772 . .	. 644
196 . .	. 64
4 . .	. 6

Je trouve, d'abord, 13 pour quotient, & 41424 pour reste : je divise donc les 41424, par 6442, en supprimant le dernier chiffre 3 du diviseur : j'ai pour quotient 6, que j'écris à la suite du premier quotient 13 ; & le reste est 2772 que je divise par 644, en supprimant encore un chiffre sur la droite du diviseur primitif : j'ai pour quotient 4, que

j'écris à la ſuite du quotient principal 136 ; le reſte eſt 196 que je diviſe par 64, en ſupprimant encore un chiffre dans le diviſeur : le quotient eſt 3, & le reſte, 4. Enfin, je diviſe par 6, & j'ai 0 pour quotient ; enſorte que le quotient de 8789236487 diviſé par 64423, eſt 136430, à moins d'une unité près. En effet, le quotient exact eſt .... $136430\frac{6597}{64423}$.

Il n'eſt pas indiſpenſable d'écrire, à chaque fois, comme nous l'avons fait, le nouveau diviſeur ; on peut ſe contenter de barrer, dans le diviſeur primitif, chaque chiffre à meſure qu'on paſſe à une nouvelle diviſion : ce n'a été que pour rendre l'opération plus ſenſible, que nous avons écrit ces diviſeurs à côté des reſtes ſucceſſifs.

70. Si le reſte de la premiere diviſion ſe trouvoit plus petit que n'eſt le diviſeur après qu'on en a ſupprimé le dernier chiffre, on mettroit zéro au quotient ; & s'il ſe trouvoit encore plus petit que ne ſeroit ce diviſeur après qu'on en a encore ôté le dernier des chiffres reſtans, on mettroit encore un zéro au quotient, & ainſi de ſuite.

EXEMPLE.

Pour avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 55106054 diviſé par 643 ; je diviſe comme à l'ordinaire, la partie 551060 qui reſte après la ſuppreſſion des deux derniers chiffres du dividende propoſé.

551060	643
3666	85701
4510 .	. 64
009 .	. 6
9 .	
9 .	
3 .	

J'ai pour quotient 857, & 9 pour reſte : il faut donc diviſer ce reſte, par 64 ſeulement ; comme 9 ne contient pas ce diviſeur, je mets 0 au quotient, & j'ai encore pour reſte, 9, que je diviſe par 6 ſeulement ; enſorte que le quotient cherché, eſt 85701, à moins d'une unité près.

71. Si lorſqu'au commencement de l'opération on ſupprime ſur la droite du dividende, les chiffres que la regle

prescrit de supprimer, il se trouve que les chiffres restans ne contiennent pas le diviseur, on supprimera tout de suite, sur la droite du diviseur, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le diviseur y soit contenu.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 1611527 divisé par 64524.

Je supprime les quatre chiffres 1527 de la droite du dividende. Mais comme les chiffres restans 161 ne peuvent pas être divisés par 64524, je supprime dans ce diviseur, les trois derniers chiffres 524 qui doivent être supprimés pour que ce diviseur soit contenu dans le dividende restant 161; ainsi je divise 161 par 64, en opérant comme dans l'exemple précédent,

	64
161	25
33 .	. 6
3	

& j'ai 25 pour le quotient de 1611527 divisé par 64524, à moins d'une unité près : en effet, le quotient exact est $24\frac{62951}{64524}$ qui est beaucoup plus près de 25 que de 24.

72. A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'augmenter d'une unité, le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime, est au-dessus de 5 ou égal à 5. On augmentera de même, d'une unité le dernier des chiffres qui restent dans le dividende, après la suppression que la regle prescrit, si ceux-ci surpassent ou 5, ou 50, ou 500, selon qu'il y en a 1 ou 2, ou 3, &c.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8657627 divisé par 1987.

Je divise donc 8658 par 1987, comme il suit,

	1987
8658	4357
710.	.199
113.	. 20
13.	. 2

C'eſt-à-dire qu'au lieu de diviſer le reſte 710 par 19[illegible]8 ſeulement, je le diviſe par 199, parce que le dernier chiffre 7, que je ſupprime, eſt au-deſſus de 5. Même raiſon pour la diviſion ſuivante. Mais comme le dernier diviſeur qui eſt contenu 6 fois $\frac{1}{2}$ dans 13 eſt un peu trop fort, je mets 7 au quotient, pour compenſer.

73. Maintenant, il eſt facile de voir ce qu'il y a faire, lorſqu'on veut avoir le quotient beaucoup plus exactement. Par exemple, ſi l'on vouloit avoir le quotient, à un dix-millieme d'unité près, la queſtion ſe réduiroit à mettre autant de zéros (ici, ce ſeroit quatre) à la ſuite du dividende, qu'on veut avoir de décimales au quotient; après quoi, on fera la diviſion ſelon la méthode actuelle. Et lorſqu'on aura trouvé le quotient, à moins d'une unité près, on en ſéparera ſur la droite, par une virgule, autant de chiffres, qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'un dix-millieme d'unité près, le quotient de 6927 diviſé par 4532; je mets quatre zéros à la ſuite de 6927, & la queſtion ſe réduit à avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 69270000 diviſé par 4532, c'eſt-à-dire, conformément à la regle ci-deſſus, à diviſer 69270 par 4532, comme il ſuit,

69270	4532
23950	15285
1290 .	. 453
384 .	. 45
24 .	. 5

le quotient cherché eſt donc, 1, 5285, à moins d'un dix-millieme d'unité près.

S'il y avoit des décimales dans le dividende, ou dans le diviſeur, ou dans tous les deux, on les rameneroit d'abord à n'en point avoir, ſelon ce qui a été dit (68), après quoi on opéreroit comme dans ce dernier exemple.

Donc ſi l'on vouloit réduire une fraction propoſée en décimales, on y parviendroit promptement par cette méthode, ayant égard à ce qui a été dit (71).

Mais on peut vérifier ces opérations par un moyen plus prompt que nous allons exposer : il ne faut pas, pour cela, négliger les réflexions que nous venons de faire : elles seront utiles dans beaucoup d'autres occasions.

Preuve par 9.

76. Supposons qu'après avoir multiplié 65498 par 454, & trouvé que le produit est 29736092, on veuille éprouver si ce produit est exact.

On ajoutera tous les chiffres 6, 5, 4, 9, 8, du multiplicande, comme s'ils ne contenoient que des unités simples, & on retranchera 9 à mesure qu'il se trouvera dans la somme ; on aura un reste qui sera ici 5.

On ajoutera pareillement les chiffres 4, 5, 4 du multiplicateur, & retranchant pareillement tous les 9 que produira cette addition, on aura pour reste 4.

On multipliera le reste 5 du multiplicande par le reste 4 du multiplicateur, & du produit 20, on retranchera les 9 qu'il peut renfermer ; il restera 2.

Si le produit est exact, il faut qu'ajoutant de même tous les chiffres 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, de ce produit, & retranchant

tous les 9, il ne reste aussi que 2; ce qui a lieu en effet.

Cette régle est fondée sur ce principe; que pour avoir le reste de la soustraction de tous les 9 qu'un nombre peut renfermer, il n'y a qu'à chercher le reste que ces chiffres ajoutés comme des unités simples, donneroient après la supression des 9.

En effet, si d'un nombre exprimé par un seul chiffre suivi de plusieurs zéros, on retranche tous les 9, le reste sera exprimé par ce seul chiffre : si de 4000 ou de 500 ou de 60000 vous retranchez tous les 9, le reste sera 4 ou 5 ou 6, &c. ce qui est aisé à voir.

Donc le reste que donneroit, par la suppression des 9, un nombre tel que 65498, (qui est la même chose que 60000, plus 5000, plus 400, plus 90, plus 8), sera le même que celui que donneroient 6, plus 5, plus 4, plus 9, plus 8; c'est-à-dire, le même que si l'on ajoutoit ses chiffres comme contenant des unités simples.

En voici maintenant l'application à la preuve de la multiplication.

Puisque 65498 est composé d'un certain nombre de 9 & d'un reste 5, & que le multiplicateur 454 est composé aussi d'un

certain nombre de 9, & d'un reſte 4, il ne peut s'en falloir que du produit de 5 par 4 ou 20 que le produit total ne ſoit diviſible par 9; ou en ôtant les 9, il ne doit s'en falloir que de 2, que le produit total ne ſoit diviſible par 9: donc il doit reſter au produit la même quantité que dans le produit des deux reſtes après la ſuppreſſion des 9 qu'il renferme.

On pourroit faire auſſi cette preuve de la même maniere par le nombre 3.

A l'égard de la diviſion, elle devient facile à éprouver, après ce qui a été dit (70). Après avoir ôté du dividende le reſte qu'a donné la diviſion, on regardera le réſultat comme un produit dont le diviſeur & le quotient ſont les facteurs, & par conſéquent on y appliquera la preuve par 9, de la même maniere qu'on vient de le faire.

A parler exactement, cette vérification n'eſt pas infaillible, parce que, dans la multiplication, par exemple, ſi l'on s'étoit trompé de quelques unités ſur quelque chiffre du produit, & qu'en même tems on eût fait une erreur égale, mais en ſens contraire, ſur quelque autre chiffre du même produit; comme cela ne changeroit rien au reſte que l'on auroit après la ſuppreſſion des 9, cette regle ne feroit point appercevoir l'erreur; mais comme il faut, ainſi qu'on le voit, au moins deux erreurs, & deux erreurs qui ſe compenſent, ou qui ne différent que d'un certain nombre de fois 9, les cas où cette vérification ſeroit fautive, ſeront très-rares dans l'uſage.

Quelques usages de la Regle précédente.

77. La division sert non-seulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquieme, le vingtieme, le trentieme, &c. d'un nombre ; c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, &c. ou le partager en 2, 3, 4, 5, 20, 30, &c. parties égales, pour prendre une de ces parties.

La division sert encore à convertir les unités d'une certaine espece, en unités d'une espece supérieure ; par exemple, un certain nombre de deniers en sols, & ceux-ci en livres. Pour réduire 5864 deniers en sols, on remarquera que puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sol, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de sols ; il faut donc diviser par 12, & on trouvera 488^{s} & 8^{d} de reste. Pour réduire en livres les 488^{s} on divisera 488 par 20, puisqu'il faut 20^{s} pour faire la livre ; & on aura en total 24 livres 8 sols 8 deniers.

A l'occasion de cette division par 20,

remarquons que quand on a à diviſer par un nombre ſuivi de zéros, on peut abréger l'opération en ſéparant ſur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros; on diviſe la partie qui reſte à gauche, par les chiffres ſignificatifs du diviſeur; s'il y a un reſte, on écrit à ſa ſuite, les chiffres qu'on a ſéparés, ce qui donne le reſte total. Par exemple, pour diviſer 5834, par 20; je ſépare le dernier chiffre 4, & je diviſe par 2, la partie reſtante 583; j'ai pour quotient 291, & 1 pour reſte; j'écris à côté de ce reſte 1, le chiffre ſéparé 4, ce qui me donne 14 pour reſte total; en ſorte que le quotient eſt 291 $\frac{14}{20}$.

Cette abréviation peut être appliquée à la réduction de la charge d'un navire en tonneaux de poids : ſi l'on ſait que la charge eſt de 2584954 livres; pour la réduire en tonneaux, c'eſt-à-dire, pour diviſer par 2000; on ſéparera les trois derniers chiffres de la droite, & prenant la moitié des autres on aura 1292 tonneaux & 954 livres.

Quand on veut évaluer en livres & ſols le vingtieme d'un nombre de livres propoſé, il ſuit de cette regle, que l'opération ſe réduit à compter le dernier chiffre pour des ſols, & prendre moitié des autres chiffres que l'on comp-

tera pour des livres. Si en prenant cette moitié, il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sols qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord. Par exemple, si l'on veut avoir le vingtieme de 54672 liv. on séparera le dernier chiffre 2 que l'on comptera pour 2 sols; & prenant la moitié de 5467 qui est 2733 avec une unité de reste, on écrira 2733 livres 12 sols: la raison de cette regle est évidente, en faisant attention que 54672 liv. est 54660 liv. plus 12 livres; or le vingtieme de 54660 est évidemment 2733, & celui de 12 liv. est 12 sols, puisque le vingtieme d'une livre est un sol. S'il y avoit des sols & deniers dans la somme proposée, on négligeroit les deniers, dont la vingtieme partie ne peut jamais faire un denier. A l'égard des sols, on les tripleroit; & prenant le cinquieme, on le porteroit aux deniers. Ainsi le vingtieme de 54672 liv. 17 sols 7 deniers, est 2733 liv. 12 sols 10 deniers.

S'il s'agissoit d'avoir le dixieme d'un nombre de livres, on sépareroit le dernier chiffre, & l'ayant doublé, on le compteroit pour des sols; & on compteroit comme des livres, tous les chiffres restans sur la gauche. Ainsi le dixieme de 67987 liv. est 6798 liv. 14 sols. La raison pour laquelle on double le dernier chiffre, est que le dixieme d'une livre, est 2 sols.

On a assez souvent besoin de prendre les quatre deniers pour livre, d'une somme proposée : cela se réduit à en prendre d'abord le vingtieme, comme il vient d'être dit: puis prendre le tiers de ce vingtieme. Ainsi pour avoir les quatre deniers pour livre de 8762 livres, j'en prends le vingtieme qui est 438 liv. 2 sols, dont le tiers 146 liv. 0 sol 8 deniers forme les quatre deniers pour livre, de 8763 liv. En effet, les quatre deniers pour livre, ne sont autre chose que le soixantieme; puisque 4 deniers sont contenus 60 fois dans la livre. Or le soixantieme est le tiers du vingtieme.

Des Fractions.

78. Les fractions considérées arithmétiquement sont des nombres par lesquels on

on exprime les quantités plus petites que l'unité.

Pour ſe faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a priſe d'abord pour unité, eſt elle-même compoſée d'un certain nombre d'unités plus petites, comme l'on conçoit, par exemple, que la livre eſt compoſée de vingt parties ou de vingt unités plus petites qu'on appelle ſols.

Une ou pluſieurs de ces parties forment ce qu'on appelle une fraction de l'unité. On donne auſſi ce nom aux nombres qui repréſentent ces parties.

79. Une fraction peut être exprimée en nombres, de deux manieres qui ſont chacune en uſage.

La premiere maniere conſiſte à repréſenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit ; mais alors on donne un nom particulier à ces parties : ainſi pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on employeroit le chiffre 7, mais on prononceroit 7 ſóls, & on écriroit 7 ſ.: cette maniere de marquer les parties de l'unité, a lieu dans les nombres complexes dont nous parlerons par la ſuite.

80. Mais comme il faudroit un ſigne particulier pour chaque diviſion qu'on pourroit faire de l'unité, on évite cette multiplicité de ſignes, en marquant une fraction par deux nombres placés l'un au-deſſous de l'autre, & ſéparés par un trait. Ainſi, pour marquer les 7 parties dont il vient d'être queſtion, on écrit $\frac{7}{20}$; c'eſt-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit, contient de parties de l'unité ; & on écrit au-deſſous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

81. Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre ſupérieur (qui s'appelle *le numérateur*); enſuite le nombre inférieur (qui s'appelle *le dénominateur*); mais on ajoute au nom de celui-ci la terminaiſon *ieme* : par exemple, pour énoncer $\frac{7}{20}$ on prononcera *ſept vingtiemes*. Pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquiemes* ; & par cette expreſſion *quatre cinquiemes*, on doit entendre quatre parties, dont il en faudroit cinq pour compoſer l'unité.

Il faut ſeulement excepter de la terminaiſon générale, les fractions dont le dé-

nominateur eſt 2 ou 3 ou 4, qui ſe prononcent, *moitiés* ou *demis*, *tiers*, *quarts*. Ainſi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ſe prononceroient un *demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

82. Le numérateur marque donc combien la quantité repréſentée par la fraction contient de parties de l'unité; & le dénominateur fait connoître de quelle valeur ſont ces parties, en marquant combien il en faut pour compoſer l'unité. On lui donne le nom de dénominateur, parce que c'eſt lui, en effet, qui donne le nom à la fraction, & qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ & $\frac{2}{7}$, les parties de la premiere s'appellent des *cinquiemes*, & les parties de la ſeconde, des *ſeptiemes*.

83. Le numérateur & le dénominateur s'appellent auſſi, d'un nom commun, les deux *termes de la fraction*.

Des Entiers conſidérés ſous la forme de Fraction.

84. Les opérations qu'on fait ſur les fractions, conduiſent ſouvent à des réſultats fractionnaires dont le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, par exemple, à des réſultats tels que $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$, &c.

Ces sortes d'expressions ne sont pas des fractions proprement dites, mais ce sont des nombres entiers joints à des fractions.

85. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers, & le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers. Ainsi $\frac{27}{5}$ donneront 5 $\frac{2}{15}$, c'est-à-dire, cinq entiers & deux cinquiemes.

En effet, dans l'expression $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5 fait connoître que l'unité est composée de 5 parties; donc autant de fois il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entieres dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

86. Les multiplications & les divisions des nombres entiers joints aux fractions exigent, du moins, pour la facilité, qu'on convertisse ces entiers en fraction.

On fait cette conversion en multipliant le nombre entier, par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier. Par exemple, si on veut convertir 8 entiers en cinquiemes, on multipliera 8 par 5, & on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 8 en cinquiemes, on re-

garde l'unité comme compoſée de 5 parties ; les 8 unités en contiendront donc 40 : pareillement 7 $\frac{4}{9}$ convertis en neuviemes, feront $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire ſubir aux deux termes d'une Fraction ſans changer ſa valeur.

87. Il eſt viſible que plus on concevra de parties dans l'unité, & plus il faudra de ces parties pour compoſer une même quantité.

88. Donc on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, &c. ſans rien changer à la valeur de la fraction, pourvu qu'en même temps on rende auſſi le numérateur double, triple, quadruple, &c.

On peut donc dire en général qu'*une fraction ne change point de valeur quand on multiplie ſes deux termes par un même nombre.*

Ainſi $\frac{3}{4}$ eſt la même choſe que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ la même choſe que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$; &c.

89. Par un raiſonnement ſemblable, on voit que moins on ſuppoſera de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties

pour former une même quantité ; que par conséquent on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, &c. fois plus petit, pourvu qu'en même tems on rende son numérateur 2, 3, 4, &c. fois plus petit ; & en général, *une fraction ne change point de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeller ce que c'est que le dénominateur, & ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

Remarquons donc que multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction ; puisque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser, sont la base des deux réductions suivantes qui sont d'un très-grand usage.

Réduction des Fractions à un même Dénominateur.

90. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les

deux termes de la premiere, chacun par le dénominateur de la ſeconde; & les deux termes de la ſeconde, chacun par le dénominateur de la premiere.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, je multiplie 2 & 3 qui ſont les deux termes de la premiere fraction, chacun par 4 dénominateur de la ſeconde; & j'ai $\frac{8}{12}$ qui (88) eſt de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie de même, les deux termes 3 & 4 de la ſeconde fraction, chacun par 3 dénominateur de la premiere, & j'ai $\frac{9}{12}$ qui eſt de la même valeur que $\frac{3}{4}$; enſorte que les fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ ſont changées en $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, qui ſont reſpectivement de même valeur que celles-là, & qui ont le même dénominateur entr'elles.

Il eſt aiſé de voir que par cette méthode le dénominateur ſera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions, puiſque dans chaque opération le nouveau dénominateur eſt formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

91. 2°. Si on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de

chacune, par le produit résultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, je multiplierai les deux termes 2 & 3 de la premiere, par le produit des trois dénominateurs 4, 5, 7 des autres fractions, produit que je trouve en disant: 4 fois 5 font 20, puis 7 fois 20 font 140; je multiplie donc 2 & 3, chacun par 140, & j'ai $\frac{280}{420}$, qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (88).

Je multiplie pareillement les deux termes 3 & 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7, produit que je forme en disant : 3 fois 5 font 15, puis 7 fois 15 font 105; je multiplie donc 3 & 4 chacun par 105, ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisieme fraction, je multiplie ses deux termes 4 & 5 chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4 & 7, & j'ai $\frac{336}{420}$ au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin pour la quatrieme je multiplierai 5 & 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs 3, 4, 5 des trois premieres fractions, & j'aurai $\frac{300}{420}$ au lieu de $\frac{5}{7}$, ensorte

que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ ſont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins ſimples, à la vérité, que celles-là, mais de même valeur qu'elles, & plus ſuſceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition & de la ſouſtraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

Réduction des Fractions à leur plus ſimple expreſſion.

92. Une fraction eſt d'autant plus ſimple, que ſes deux termes ſont de plus petits nombres. Il eſt ſouvent poſſible d'amener une fraction propoſée, à être exprimée par de moindres nombres, & cela lorſque ſon numérateur & ſon dénominateur peuvent être diviſés par un même nombre; comme cette opération n'en change point la valeur (89), c'eſt une ſimplification qu'on ne doit pas négliger.

Voici le procédé qu'il faudra ſuivre.

93. On divisera le numérateur & le dénominateur, chacun par 2, & on répétera cette division tant qu'elle pourra se faire exactement.

On divisera ensuite les deux termes par 3, & on continuera de diviser l'un & l'autre par 3, tant que cela pourra se faire.

On fera la même chose successivement avec les nombres, 5, 7, 11, 13 17, &c. c'est-à-dire, avec les nombres qui n'ont aucun diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, & qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainsi la seule difficulté qu'il y ait, est de savoir quand est-ce qu'on pourra diviser par 2, 3, 5, &c.

On pourra dans cette recherche s'aider des principes suivans.

94. Tout nombre qui finit par un chiffre pair est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble comme s'ils étoient des unités simples, fera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire, un nombre exact de fois 3, sera divisible par 3. Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1 font 15, qui est 5 fois 3.

La même choſe a lieu pour le nombre 9, ſi les chiffres ajoutés enſemble font 9, ou un multiple de 9.

Cette propriété du nombre 3 ſe démontre comme celle du nombre 9 à très-peu de choſe près ; & l'un & l'autre ſe démontrent comme on l'a fait à la preuve de 9 (75).

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro, eſt diviſible par 5.

A l'égard du nombre 7 & des ſuivans ; quoiqu'il ſoit facile de trouver de pareilles regles, comme l'examen qu'elles ſuppoſent eſt auſſi long que la diviſion, il faudra eſſayer la diviſion.

Propoſons-nous, pour exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je diviſe les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun ſont pairs, & j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je diviſe encore par 2 & j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-deſſus, m'apprend que je puis diviſer par 3 ; je diviſe en effet & j'ai $\frac{168}{483}$; je diviſe encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'eſſaye de diviſer par 7 ; la diviſion réuſſit & donne $\frac{8}{23}$.

La raiſon pour laquelle nous preſcrivons de ne tenter la diviſion que par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, &c. c'eſt qu'après

avoir épuisé la division par 2, par exemple, il est inutile de tenter de diviser par 4, puisque si celle-ci pouvoit réussir, à plus forte raison la division par 2 auroit-elle pu encore se faire.

95. De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expression plus simple, le plus direct est celui de diviser les deux termes par le plus grand diviseur commun, qu'ils puissent avoir : voici la regle pour trouver ce plus grand diviseur.

Divisez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a point de reste, c'est le plus petit terme qui est le plus grand diviseur commun.

S'il y a un reste divisez le plus petit terme par ce reste, & si la division se fait exactement, c'est ce premier reste qui est le plus grand diviseur commun.

Si cette seconde division donne un reste, divisez le premier reste par le second, & continuez toujours de diviser le reste précédent par le dernier reste jusqu'à ce que vous arriviez à une division exacte. Alors le dernier diviseur que vous aurez employé, sera le plus grand diviseur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviseur se trouve être l'unité, c'est une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je divise 9024 par 3760; j'ai pour quotient 2, & pour reste 1504.

Je divise 3760 par 1504; j'ai pour quotient 2, & pour reste 752.

Je divise le premier reste 1504 par le second reste 752; la division réussit, & j'en conclus que 752 peut diviser les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, & la réduire à sa plus simple expression qu'on trouve, en faisant l'opération, être $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 divise 1504; il doit donc diviser 3760 qu'on a vu être composé de deux fois 1504, & de 752; on voit de même, qu'il doit diviser 9024, puisque 9024 est composé de deux fois 3760, & de 1504.

On voit de plus que 752 est le plus grand diviseur commun que puissent avoir 3760 & 9024; car il ne peut y avoir

de diviſeur commun entre 9024 & 3760 qui ne le ſoit en même temps de 3760 & 1504 ; & entre ces deux-ci, il ne peut y en avoir un qui ne ſoit en même temps diviſeur commun de 1504 & de 752 ; mais il eſt évident qu'entre ces deux-ci, il ne peut y avoir de diviſeur commun plus grand que 752 ; donc, &c.

Différentes manieres dont on peut envisager une fraction ; & conséquences qu'on peut en tirer.

96. L'idée que nous avons donnée juſqu'ici d'une fraction, eſt que le dénominateur repréſente de combien de parties l'unité eſt compoſée ; & le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore enviſager une fraction ſous un autre point de vue : on peut conſidérer le numérateur comme repréſentant une certaine quantité qui doit être diviſée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur. Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut conſidérer 4 comme repréſentant quatre choſes quelconques, 4 liv. par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties ; car il eſt évident que c'eſt la même choſe de partager 4 liv. en cinq parties pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties

pour prendre 4 de ces parties.

97. On peut donc conſidérer le numérateur d'une fraction comme un dividende, & le dénominateur comme un diviſeur. On voit par-là, ce que ſignifient les reſtes de diviſion mis ſous la forme que nous leur avons donnée (60).

98. Il ſuit delà 1°, qu'un entier peut toujours être mis ſous la forme d'une fraction, en faiſant de cet entier le numérateur, & lui donnant l'unité pour dénominateur; ainſi 8 ou $\frac{8}{1}$ ſont la même choſe; 5 ou $\frac{5}{1}$ ſont la même choſe.

99. 2° Que pour convertir une fraction quelconque en décimales, il n'y a qu'à conſidérer le numérateur comme un reſte de diviſion où le dénominateur étoit diviſeur, & opérer par conſéquent, comme il a été dit (pag. 67), en obſervant de mettre d'abord un zéro au quotient pour tenir la place des unités; c'eſt ainſi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent en décimales, 0, 6, que $\frac{5}{9}$ valent 0, 555, &c. que $\frac{1}{25}$ vaut 0,04, & ainſi de ſuite.

C'eſt ainſi qu'on peut réduire en décimales, tout nombre complexe propoſé. Par exemple, s'il s'agit de réduire $3^{t}\ 5^{p}\ 8^{p}\ 7^{l}$ en décimales de la toiſe, de maniere à ne

pas négliger une demi-ligne : j'observe que la toise contient 864 lignes, & par conséquent 1728 demi-lignes ; il faut donc pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au-delà des milliemes ; c'est-à-dire, jusqu'aux dix milliemes.

Cela posé, je réduis les $5^p\ 8^p\ 7^l$ tout en lignes ; & j'ai 823 lignes ou $\frac{823}{864}$ de la toise : réduisant cette fraction en décimales, comme il vient d'être dit, on a 0,9525, & par conséquent 3^T,9525, pour le nombre proposé.

Des opérations de l'Arithmétique sur les Fractions.

100. On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Les deux premieres opérations, l'addition & la soustraction, exigent le plus souvent une opération préparatoire ; les deux autres n'en exigent pas.

De l'addition des Fractions.

101. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, & on donnera à la somme, le dénominateur commun de ces fractions.

Ainſi pour ajouter $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3 & 5, & j'ai par conſéquent $\frac{10}{7}$ que je réduis à $1\frac{3}{7}$ (85).

102. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enſeigné (90) & (91); après quoi on ajoutera ces nouvelles fractions de la maniere qui vient d'être preſcrite. Ainſi ſi l'on propoſe d'ajouter $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, je change ces trois fractions en ces trois autres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, dont la ſomme eſt $\frac{133}{60}$ qui ſe réduit à $2\frac{13}{60}$ (85).

De la ſouſtraction des Fractions.

103. Si les deux fractions propoſées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre, & on donnera au reſte, le dénominateur commun de ces deux fractions. S'il eſt queſtion de retrancher $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, le reſte ſera $\frac{3}{9}$, qui ſe réduit à $\frac{1}{3}$ (93).

104. Si de $9\frac{5}{8}$ on vouloit retrancher $4\frac{7}{8}$ comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, on emprunteroit ſur 9 une unité, laquelle réduite en huitiemes & ajoutée à $\frac{5}{8}$, feroit $\frac{13}{8}$, deſquels ôtant $\frac{7}{8}$, il reſteroit $\frac{6}{8}$; ôtant enſuite 4 de 8 qui reſtent après l'emprunt, il

il resteroit en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

105. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (90) & (91), après quoi on fera la soustraction comme il vient d'être dit. Ainsi pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je change ces fractions en $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$; & retranchant 8 de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

De la multiplication des Fractions.

106. *Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, & le dénominateur par le dénominateur.* Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur, & par conséquent $\frac{8}{15}$ pour le produit.

Pour sentir la raison de cette regle, il faut se rappeller que multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$, ou, plus exactement, c'est prendre 4 fois la cinquieme partie de $\frac{2}{3}$: or en multipliant le dénominateur 3 par 5, on change les tiers

en quinziemes, c'eſt-à-dire, en parties cinq fois plus petites; & en multipliant le numérateur 2 par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquieme partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc en effet $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

107. Si l'on avoit un entier à multiplier par une fraction, ou une fraction à multiplier par un entier, on mettroit l'entier ſous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; par exemple, ſi j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$, cela ſe réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, ſelon la regle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui ſe réduiſent à $5\frac{1}{7}$.

On voit donc que pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, l'opération ſe réduit à multiplier le numérateur de cette fraction, par l'entier.

108. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, il faudroit, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers chacun en fraction de même eſpece que celle qui l'accompagne; par exemple, ſi l'on a $12\frac{3}{5}$ à multiplier par $9\frac{3}{4}$, je change (86) le multiplicande en $\frac{63}{5}$, & le multiplicateur en $\frac{39}{4}$; & je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$, ſelon

la regle ci-dessus (106), ce qui me donne $\frac{2457}{20}$ qui valent 122 $\frac{17}{20}$.

Division des Fractions.

109. *Pour diviser une fraction par une fraction, il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, & multiplier la fraction dividende, par cette fraction ainsi renversée.*

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$, je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$, selon la regle donnée (106), & j'ai $\frac{12}{10}$ ou 1 $\frac{2}{10}$ pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Pour appercevoir la raison de cette regle, il faut observer que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$; or il est facile de voir que, puisque le diviseur est 2 tiers, il sera contenu dans le dividende trois fois autant que s'il étoit 2 entiers; donc il faut diviser d'abord par 2 & multiplier ensuite par 3, ce qui n'est autre chose que prendre trois fois la moitié du dividende, ou le multiplier par $\frac{3}{2}$ qui est la fraction diviseur renversée.

110. Si l'on avoit une fraction à diviser par un entier, ou un entier à diviser

par une fraction, on commenceroit par mettre l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur: par exemple, si l'on a 12 à diviser par $\frac{5}{7}$, on réduira l'opération à diviser $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, selon la regle qu'on vient de donner, se réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, & donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$. Pareillement, si l'on avoit $\frac{3}{4}$ à diviser par 5, on réduiroit l'opération à diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$, c'est-à-dire, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{5}$, ce qui donne $\frac{3}{20}$.

On voit donc que lorsqu'on a une fraction à diviser par un entier, l'opération se réduit à multiplier le dénominateur, par cet entier.

111. S'il y avoit des entiers, joints aux fractions, on réduiroit ces entiers chacun en fraction de même espece que celle qui l'accompagne: par exemple, si l'on avoit $54\frac{3}{5}$ à diviser par $12\frac{2}{3}$, on changeroit le dividende en $\frac{273}{5}$, & le diviseur en $\frac{38}{3}$, & l'opération seroit réduite à diviser $\frac{273}{5}$ par $\frac{38}{3}$, c'est-à-dire, (109) à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{3}{38}$, ce qui donneroit $\frac{819}{190}$ ou $4\frac{59}{190}$.



Quelques applications des Regles précédentes.

112. Après ce que nous avons dit (96), il eſt aiſé de voir comment on peut évaluer une fraction. Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre. Puiſque les $\frac{5}{7}$ d'une livre ſont la même choſe (96) que le ſeptieme de 5 livres, je réduis les 5 livres en ſols (57), & je diviſe les 100 ſols qu'elles me donnent, par 7, ce qui me donne 14 ſols pour quotient & 2 ſols de reſte ; je réduis ces 2 ſols en deniers, & je diviſe 24 deniers par 7, j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$, ainſi les $\frac{5}{7}$ d'une livre, ſont 14 ſols 3 deniers & $\frac{3}{7}$ de denier.

Si l'on demandoit les $\frac{5}{7}$ de 24 liv. il eſt viſible qu'on pourroit d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre ; & multiplier enſuite par 24, ce qu'auroit donné cette opération ; mais il eſt plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 liv. ce qui (197) donne $\frac{120}{7}$ liv. & d'évaluer enſuite cette derniere fraction qu'on trouvera valoir 17 liv. 2 ſols 10 deniers $\frac{2}{7}$.

113. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, ſont encore plus

faciles à évaluer : si l'on demande, par exemple, combien valent 0, 532 de toise ; comme la toise est de 6 pieds, je multiplierai 0, 532 par 6, ce qui me donnera 3, 192 pieds ; c'est-à-dire, 3^p & 0, 192 de pied ; multipliant cette derniere fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire, 2^p & 0, 304 de pouce ; enfin multipliant celle-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3, 648 lignes, ou 3^l & 0, 648 de ligne ; c'est-à-dire, que la valeur de la fraction 0, 532 de toise, sera 3^P 2^{pl} 3^l & 0, 648 de ligne.

114. L'évaluation des fractions nous conduit naturellement à parler des *fractions de fractions* : on appelle ainsi une suite de fractions séparées les unes des autres par l'article *de* ; par exemple, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. sont des fractions de fractions. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entr'eux, & tous les dénominateurs entr'eux : ensorte que la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$; la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de

fois la fraction $\frac{3}{4}$. Pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$; & ce qu'on vient de dire, fait connoître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si l'on demandoit les $\frac{3}{4}$ *de* $5\frac{3}{8}$, on convertiroit l'entier 5 en huitiemes, & la question feroit réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$ qu'on trouveroit être $\frac{129}{32}$ ou $4\frac{1}{32}$.

Ajoutons à tout ce que nous avons dit fur les fractions, un exemple qui renferme plufieurs des regles que nous avons établies.

Suppofons qu'on veut conftruire un vaiffeau de 140 pieds $\frac{2}{3}$ de longueur; que les diftances entre les fabords, en y comprenant l'efpace entre le premier fabord & la rablure de l'étrave, & l'efpace entre le dernier fabord & la rablure de l'étambot, faffent $108\frac{3}{4}$ pieds : on demande fi l'on peut percer 12 fabords à la premiere batterie de chaque bord.

De 140 pieds $\frac{2}{3}$, je retranche $108\frac{3}{4}$ (103 & *fuiv.*) il me refte 31 $\frac{11}{12}$ pour les fabords; je divife $31\frac{11}{12}$ par 12, c'eft-à-dire, $\frac{383}{12}$ par $\frac{12}{1}$ (86) & (110), j'ai pour quotient $\frac{383}{144}$ de pied, qui valent 2 pieds & $\frac{95}{144}$, fraction qui évaluée en pouces & lignes, vaut 7

pouces 11 lignes ; ainsi il faudroit donner à chaque sabord 2 pieds 7 pouces 11 lignes, c'est-à-dire, 2 pieds 8 pouces à peu-près, ce qui est une mesure convenable pour un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$.

115. Lorsqu'une fraction exprimée par des nombres un peu considérables, n'est pas réductible par la méthode donnée (95), & qu'on peut se contenter d'en avoir une valeur approchée, on peut y parvenir par la méthode suivante qui donne alternativement des fractions plus grandes & plus petites que la proposée, mais toujours de plus en plus approchées, ensorte qu'à la derniere opération, on retombe sur la fraction proposée. Prenons, par exemple, la fraction $\frac{100000}{314159}$, qui, comme on le verra en Géométrie, exprime le rapport très-approché du diametre à la circonférence ; & proposons-nous d'exprimer cette fraction par d'autres fractions moins exactes, à la vérité, mais exprimées par des nombres plus simples.

Divisez le numérateur & le dénominateur, par le numérateur ; vous aurez $\frac{1}{3\frac{14159}{100000}}$ Pour avoir une premiere valeur approchée, négligez la fraction qui accompagne 3, & vous aurez $\frac{1}{3}$ pour premiere valeur approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur plus approchée, divisez le numérateur & le dénominateur de la fraction qui accompagne 3, chacun par le numérateur de cette fraction, & vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{887}{14159}}}$; négligez la fraction qui accompagne 7, & vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (86) $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (109) $\frac{7}{22}$ pour seconde valeur, qui est plus approchée que la premiere, mais un peu trop foible.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez le numérateur & le dénominateur de la fraction qui accompagne 7, chacun par le numérateur de cette fraction ;

vous aurez $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\cfrac{1}{15\frac{854}{887}}}}$: ſupprimez la fraction qui accompagne 15, & vous aurez $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\frac{1}{15}}}$ qui revient à $\frac{106}{333}$, valeur plus approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, diviſez les deux termes de la fraction qui accompagne 15, chacun par le numérateur 854, & vous aurez $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\cfrac{1}{15\cfrac{1}{1\frac{33}{854}}}}}$; négligeant la fraction $\frac{33}{854}$, vous aurez pour valeur plus approchée, $\frac{113}{355}$, mais qui eſt un peu trop foible. On voit à préſent comment on peut continuer.

Des Nombres complexes.

116. Quoique les regles que nous avons expoſées juſqu'ici, puiſſent ſervir auſſi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir conſidérer ceux-ci d'une maniere plus particuliere, parce que la diviſion qu'on y fait de l'unité principale, en facilite ſouvent le calcul.

Il y a pluſieurs ſortes de nombres complexes, & les regles pour les calculer tiennent beaucoup à la diviſion qu'on a faite de l'unité : cependant il n'eſt pas néceſſaire d'examiner toutes ces eſpeces pour être en état de les calculer ; mais il importe de

savoir quels rapports leurs différentes parties ont tant entr'elles, qu'à l'égard de l'unité principale ; c'est par cette raison que nous donnons ici une Table des nombres complexes dont l'usage est le plus fréquent.

TABLE des unités de quelques especes, & caracteres par lesquels on représente ces différentes unités.

POUR LES MONNOIES.

₶ signifie ......livre	1 livre vaut ....20 sols
f.............sol	1 sol vaut.......12 deniers

POUR LES POIDS.

℔ signifie......livre	1 livre (poids) vaut 2 mars
M............marc	1 marc ....8 onces
O ou ℥........once	1 once ....8 gros
G ou ʒ ....gros	1 gros 3 deniers ou scrupules
D ou ℈. denier ou scrupule.	1 denier ......24 grains
.............grain	

POUR L'ÉTENDUE DES LIGNES.

T signifie ......toise	1 toise vaut.....6 pieds
P ....pied	1 pied........12 pouces
p.............pouce	1 pouce ......12 lignes
l.............ligne	1 ligne ....12 points
pt...........point	

POUR LE TEMS.

J signifie ......jour	1 jour vaut....24 heures
H. ....heure	1 heure ......60 minutes
' ....minute	1 minute......60 secondes
''.............seconde	1 seconde .....60 tierces

Nous donnerons en Géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies & aux capacités des Corps.

Addition des Nombres complexes.

117. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés, les uns au-dessous des autres, de maniere que toutes les parties d'une même espece se trouvent chacune dans une même colonne verticale, & après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espece la plus petite; si leur somme ne compose pas une unité de l'espece immédiatement supérieure, on l'écrit sous les unités de son espece; si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espece immédiatement supérieure, on n'écrit, au-dessous de cette colonne, que l'excédent d'un nombre juste d'unités de cette seconde espece, & on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs semblables sur lesquelles on procede de la même maniere.

EXEMPLE I.

On propose d'ajouter..	227#	14f	8d
	2549	18	5
	184	11	11
	17	10	7
	2979#	15f	7d o.n.

La somme des deniers est 31 qui renferme 2 douzaines de deniers ou 2 sols & 7 deniers ; je pose les 7 deniers, & je retiens 2 sols que j'ajoute avec les unités de sols, ce qui donne 15 sols, dont je pose seulement le chiffre 5, & je retiens la dixaine pour l'ajouter aux dixaines, ce qui me donne 5 ; & comme il faut 2 dixaines de sols pour faire une livre, je prends la moitié de 5 qui est 2 avec 1 pour reste ; je pose ce reste, & je porte les 2 livres à la colonne des livres que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

On propose d'ajouter	54^T	2^P	3^p	9^l
	12	5	4	11
	9	4	11	11
	8	2	9	10
	85^T	3^P	6^p	5^l

La somme des lignes monte à 41 qui font 3 pouces 5 lignes ; je pose 5 lignes, & je retiens les 3 pouces que j'ajoute avec les pouces ; le tout me donne 30 qui valent 2 pieds 6 pouces, je pose les 6 pouces, & je retiens les 2 pieds, qui, ajoutés avec les pieds, me donnent 15 pieds

qui valent 2^T 3^P ; je pose les 3^P & j'ajoute les deux toises avec les toises ; le tout monte à 85, ensorte que la somme est 85^T 3^P 5^p 5^l 6^{pts}.

Soustraction des Nombres complexes.

118. Ecrivez les nombres proposés, comme dans l'addition, & commencez la soustraction par les unités de l'espece la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous. S'il ne peut en être retranché, empruntez sur l'espece immédiatement supérieure, une unité que vous réduirez à l'espece dont il s'agit, & que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espece ; & lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin, écrivez chaque reste, à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE I.

De . . . . $143^{tt}\ 17^{s}\ 6^{d}$
on veut ôter. . . . $75^{tt}\ 12^{s}\ 9^{d}$

$68^{tt}\ 4^{s}\ 9^{d}$ reste

Ne pouvant ôter 9^{d} de 6^{d}, j'emprunte 1^{s} qui vaut 12^{d}, & 6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9; j'ôte ensuite 12, non pas de 17, mais de 16 qui restent après l'emprunt, & il reste 4; enfin je retranche 75 liv. de 143 liv. & il me reste 68 liv.

EXEMPLE II.

De . . . . $163^{tt}\ 0^{s}\ 5^{d}$
on veut ôter . . . $84^{tt}\ 18^{s}\ 9^{d}$

$78^{tt}\ 1^{s}\ 8^{d}$ reste

Comme je ne puis ôter 9^{d} de 5^{d}, & que d'ailleurs il n'y a pas de sols sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte 1 liv. sur 163 liv. mais j'en laisse, par la pensée, 19 sols à la place du zéro, après quoi j'opere comme ci-dessus.

Multiplication des Nombres complexes.

119. On peut réduire généralement

la multiplication des nombres complexes, à la multiplication d'une fraction par une fraction, multiplication dont nous avons donné la regle (106). Par exemple, si l'on demande ce que doivent coûter 54^T 3^P d'ouvrage, à raison de 42 livres 17 sols 8 den. la toise, on peut réduire le multiplicande 42 liv. 17 sols 8 den. tout en den. (57); ce qui donnera 10292 den. & comme le denier est la 240e partie de la livre, le multiplicande peut être représenté par $\frac{10292}{240}$ de la livre; pareillement on réduira le multiplicateur $54^T\ 3^P$ tout en pieds, ce qui donnera 327^P; & comme le pied est la sixieme partie de la toise, on aura pour multiplicateur $\frac{327}{6}$ de toise, ensorte que la question est réduire à multiplier $\frac{10292}{240}$ de livre, par $\frac{327}{6}$, ce qui (106) donnera $\frac{3365484}{1440}$ de livre, qui (112) valent 2337 liv. 2 sols 10 deniers.

Cette méthode s'étend à toute espece de nombres complexes, mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

120. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre, est dit partie *aliquote* de cet autre: ainsi 3 est partie aliquote

On multipliera d'abord, ſelon les regles ordinaires 72 liv. par 54. Enſuite pour multiplier par 3p qui ſont la moitié de la toiſe, & qui par conſéquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toiſe, on prendra la moitié de 72 liv. & additionnant, on aura 3924# pour produit total.

EXEMPLE II.

Si on avoit	72#
à multiplier par	54T 5p
	288# 0f 0d
	360
	36
	24
	3948# 0f 0d

On multipliera d'abord 72 liv. par 54. Enſuite au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds ſont les $\frac{5}{6}$ de la toiſe, on décompoſera 5P, en 3P & 2P, dont le premier eſt la moitié, & le ſecond le $\frac{1}{3}$ de la toiſe; on prendra donc d'abord la moitié de 72 liv. & enſuite le $\frac{1}{3}$ de 72 liv. & on aura, en réuniſſant tous ces produits particuliers, 3948 liv. pour produit total.

EXEMPLE III.

Que l'on ait . . . . 72 ₶
à multiplier par 5T 4P 8P

	360 ₶ 0f 0d
	36
	12
	4
	4
	416 ₶ 0f 0d

Après avoir multiplié par 5T on multipliera par 4P, & pour cet effet on décomposera ce nombre en 3P & 1P; pour 3P on prendra la moitié de 72 l. qui est 36 l. & pour un pied, on remarquera que c'est le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, & par conséquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 liv. qui est 12 liv. Ensuite pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toise, on les comparera au pied, & on les décomposera en 4 pouces, & 4 pouces qui sont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, & qui par conséquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 liv. Enfin réunissant, on aura 416 liv. 0f 0d pour produit.

122. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme

il va être expliqué dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

Si l'on a . . . :	72$^{\#}$	6^{f}	6^{d}
à multiplier par	27T	4^{P}	8^{P}
	504$^{\#}$	0^{f}	0^{d}
	144		
	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	4$\frac{1}{3}$
	4	0	4$\frac{1}{3}$
	2009$^{\#}$	0^{f}	6$^{d}\frac{2}{3}$

On multipliera d'abord 72 liv. par 27. Ensuite pour multiplier 6 sols par 27, on décomposera ces 6 sols en 5 sols & 1 sol. Les 5 sols faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27; donner 27 fois le quart de la livre, ou le quart de 27 liv. on prendra donc le quart de 27 liv. qui est 6 liv. 15 sols. Pour multiplier 1 sol par 27, on remarquera qu'un sol est la cinquieme partie de 5 qu'on vient de multiplier, ainsi on prendra le cinquieme des 6 liv. 15 sols, qui sera 1 livre 7 sols.

A l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils sont la moitié d'un sol, & par conséquent on prendra la moitié de 1 liv. sols qu'on a eu pour un sol.

Jusques-là tout le multiplicande est multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même maniere que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire, que pour les 4P, on prendra d'abord pour 3P, la moitié 36 liv. 3 sols 3 den. du multiplicande, & pour 1P le tiers de ce que donnent les 3P. Enfin pour 8P, on prendra 2 fois pour 4, c'est-à-dire, qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1P; en réunissant toutes ces différentes parties, on aura 2009 liv. 0f 6 den. $\frac{2}{3}$ pour produit total.

123. Jusqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été assez faciles à évaluer, mais dans les cas où ces parties seroient plus composées, on se conduiroit comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE V.

A raiſon de . . . . 34[#] 10[f] 2[d] la toiſe, combien doivent coûter 17[T]

238[#] 0[f] 0[d]
34
8 10
~~0~~ ~~17~~
0 . 2 10
586[#] 12[f] 10[d]

Après avoir multiplié 34 liv. par 17 ; & enſuite les 10 ſols par 17 en prenant moitié de 17, on multipliera 2 deniers qui ſont la ſixieme partie d'un ſol, & par conſéquent la ſixieme partie de la dixieme partie ou (114) la 60e partie de 10 ſols, mais au lieu de prendre la 60e partie de 8 liv. 10 ſols, il ſera plus commode de faire un faux produit, & de prendre d'abord le dixieme de ce qu'ont donné 10 ſols, c'eſt-à-dire, le dixieme de 8 liv. 10 ſols ; ce dixieme qui eſt 0 liv. 17 ſols, eſt pour un ſol ; mais comme il ne faut que pour le ſixieme d'un ſol, on barrera ce faux produit, & on en écrira le ſixieme au deſſous.

EXEMPLE VI.

Combien pour 34 liv. 10 ſols 2 deniers ſera-t-on faire d'ouvrage, à raiſon de 1 liv. pour 17 toiſes?

Il faut multiplier 17 toiſes par 34 liv. 10 ſols 2 deniers, c'eſt-à-dire, prendre 17 toiſes autant de fois que la livre eſt contenue dans 34 liv. 10 ſols 2 deniers.

17^{T}					
34^{tt}	10^{f}	2^{d}			
68^{T}	0^{p}	0^{p}	0^{l}	0^{pts}.	
51					
8	3				
~~0~~	~~5~~	~~1~~	~~2~~	~~4~~	~~$\frac{4}{5}$~~
0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$
586^{T}	3^{p}	10^{p}	2^{l}	4^{pts}.	$\frac{4}{5}$

Ainſi on multipliera d'abord 17 toiſes par 34; enſuite pour multiplier 17 toiſes par 10 ſols, on prendra la moitié de 17 toiſes, parce que 10 ſols font la moitié de la livre, & on aura 8 toiſes 3 pieds. Pour multiplier par deux deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donneroit 1 ſol, en prenant le dixieme de

ce qu'ont donné 10 sols ; ce dixieme est 0 toises 5 pieds 1 pouce 2 lignes 4 points & $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de point ; on le barrera comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le sixieme pour avoir le produit de 2 deniers, & on écrira au-dessous ce sixieme qui est 0 toises, 0 pieds 10 pouces 2 lignes 4 points & $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement, pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importoit de distinguer le multiplicande du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets : en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises & 34 liv. 10 sols 2 deniers ; cependant les deux produits sont différents.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre incomplexe.

124. Si le dividende seul est complexe, & si en même temps le dividende & le diviseur ont des unités de différente espece, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la regle ordinaire ; ce qui restera de cette division,

on le réduira (57) en unités de la ſeconde eſpece, qu'on ajoutera avec celles de même eſpece, qui ſe trouveront dans le dividende, & on diviſera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reſte de cette diviſion en unités de la troiſieme eſpece ; auxquelles on ajoutera celles de la même eſpece qui ſe trouveront dans le dividende, & on diviſera le tout comme ci-deſſus ; on continuera de réduire les reſtes, en unités de l'eſpece ſuivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE.

On a donné 4783 liv. 3 ſols 9 den. pour paiement de 87 toiſes d'ouvrage ; on demande à combien cela revient la toiſe ?

4783# 3ſ 9d	87
433	54# 19ſ 7d
85	
1703ſ	
833	
50	
609d	
000	

Il faut diviser 4783 liv. 3 sols 9 deniers par 87, en commençant par les livres.

Les 4783 liv. divisées par 87, selon la regle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, & 85 liv. pour reste : ces 85 liv. réduites en sols (57) donneront avec les 3 sols du dividende 1703 sols, qui divisés par 87, donneront 19 sols pour quotient, & 50 sols pour reste : ces 50 sols réduits en deniers, donnent avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, lesquels divisés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

125. Mais si le dividende & le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être ou ne pas être de même espèce qu'eux ; ce que l'état de la question décide toujours.

126. Dans le cas où le dividende & le diviseur étant de même espece, le quotient devra aussi être de même espece qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent ; par exemple, si l'on proposoit cette question, 1243 livres ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre ? il est évident que le quotient doit avoir des

unités de même eſpece que le dividende & le diviſeur, c'eſt-à-dire, doit être des livres, & qu'on doit diviſer 7254 livres par 1243, en réduiſant comme dans l'exemple précédent, le reſte de cette diviſion en ſols, & le ſecond reſte en deniers; & on trouvera 5 liv. 16 ſols 8 den. $\frac{760}{1243}$, pour réponſe à la queſtion.

127. Mais lorſque le dividende & le diviſeur étant de même eſpece, le quotient devra être d'eſpece différente; alors il faudra commencer par réduire (57) le dividende & le diviſeur, chacun à la plus petite eſpece qui ſoit dans le dividende, après quoi on fera la diviſion comme dans le cas précédent, & on y traitera les unités du dividende, comme ſi elles étoient de même eſpece que celles que doit avoir le quotient: par exemple, ſi l'on propoſoit cette queſtion, combien pour 7954 livres 11 ſols 7 den. fera-t-on faire d'ouvrage à raiſon de 72 liv. la toiſe? Il eſt clair, par la nature de la queſtion, que le quotient doit être des toiſes & parties de toiſe. On réduira donc 7954 liv. 11 ſols 7 den. tout en deniers, ce qui donnera 1909099: on réduira pareillement 72 livres en deniers, & on aura 17280;

en division [illegible] considéré comme des toises, par [illegible], & on aura pour quotient [illegible]

Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe.

148. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espece, &c., multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien de fois [illegible]

EXEMPLES.

[illegible]

61552 liv. 10 sols pour nouveau dividende, ensorte que je divise comme il suit.

61552# 10	4169
19862	14# 15ſ $3^d \frac{1833}{4169}$
3186	
63730ſ	
22040	
1195	
14340	
1833	

Les 61552 liv. divisées par 4169 donnent 14 liv. pour quotient, & 3186 pour reste. Ces 3186 liv. réduites en sols, donnent avec les 10 sols du dividende, 63730 sols, qui divisés par 4169 donnent 15 sols pour quotient, & 1195 sols de reste. Ces 1195 sols réduits en deniers valent 14340 deniers, lesquels divisés par 4169 donnent 3 deniers pour quotient, & 1833 deniers pour reste; ensorte que le quotient est 14 liv. 15 sols 3 den. $\frac{1833}{4169}$ de denier.

Pour entendre la raison de cette regle, il faut faire attention que les 57T 5P 5P valant 4169P, & le pouce étant la soixante-douzieme partie de la toise, le diviseur

eſt $\frac{4169}{72}$ de la toiſe ; or, pour diviſer p
une fraction, il faut (109) renverſer
fraction diviſeur, & multiplier enſuite p
cette fraction ainſi renverſée ; il faut do
ici multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient
multiplier d'abord par 72, & à divi
enſuite par 4169, ainſi que le preſcrit *la*
regle que nous donnons.

Comme la diviſion par un nombre complexe ſe réduit, ainſi qu'on vient de *le* voir, à la diviſion par un nombre incomplexe, on doit avoir ici les mêmes attentions à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (126) & (127).

Ce ſeroit ici le lieu de parler du toiſé ou de la multiplication & de la diviſion géométriques ; ces opérations ne différent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'expoſer ; enſorte qu'il n'y auroit ici d'autre choſe à ajouter, que d'expliquer quelle eſt la nature des unités des facteurs & du produit ; mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, juſqu'à ce que nous ſoyons arrivés à la Géométrie.



De la formation des Nombres quarrés & de l'extraction de leur racine.

129. On appelle *quarré* d'un nombre, le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-même ; ainsi 25 est le quarré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

130. La *racine quarrée* d'un nombre proposé, est le nombre qui multiplié par lui même, reproduiroit ce même nombre proposé : ainsi 5 est la racine quarrée de 25 ; 7 est la racine quarrée de 49.

131. Un nombre que l'on quarre, est donc tout à la fois multiplicande & multiplicateur ; il est donc deux fois facteur (42) du produit ; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou quarré, la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour quarrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les regles ordinaires de la multiplication ; mais pour extraire la racine quarrée d'un nombre, c'est-à-dire, pour revenir du quarré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou quarré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un

ou deux chiffres, sa racine, en nombre entier, est quelqu'un des nombres......

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dont les quarrés sont,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine quarrée de 72, par exemple, est 8 en nombre entier, parce que 72 étant entre 64 & 81, sa racine est entre les racines de ceux-ci, c'est-à-dire, entre 8 & 9; elle est 8 & une fraction, fraction qu'à la vérité on ne peut pas assigner exactement; mais dont on peut approcher continuellement, ainsi que nous le verrons dans peu.

132. La racine quarrée d'un nombre qui n'est point un quarré parfait, s'appelle un nombre *sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable*.

133. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'est en observant ce qui se passe dans la formation du quarré, que nous trouverons la méthode qu'on doit suivre pour revenir à la racine.

Pour

Pour quarrer un nombre tel que 54, par exemple.

```
  54
  54
 ---
 216
270
----
2916
```

Après avoir écrit le multiplicande & le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *quarré des unités.*

Nous multiplions ensuite le 5 supérieur, par le 4 inférieur, ce qui fait le *produit des dixaines par les unités.*

Nous passons, après cela, au second chiffre du multiplicateur 5, & nous multiplions le 4 supérieur, par le 5 inférieur; ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités.*

Enfin nous multiplions le 5 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait *le quarré des dixaines.*

Nous ajoutons ces produits, & nous avons pour quarré, le nombre 2916 que nous voyons donc être composé *du quarré*

Arithmétique. I

des dixaines, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités du nombre 54.

134. Ce que nous venons d'obſerver étant une conſéquence immédiate des regles de la multiplication, n'eſt pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre compoſé de dixaines & d'unités; enſorte qu'on peut dire généralement que le quarré de tout nombre compoſé de dixaines & d'unités renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer; ſavoir, le quarré des dixaines de ce nombre, deux fois le produit des dixaines par les unités, & le quarré des unités.

135. Cela poſé comme le quarré des dixaines eſt des centaines, (puiſque 10 fois 10 font 100), il eſt viſible que ce quarré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du quarré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multipliées par les unités, étant néceſſairement des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du quarré total.

136. Donc pour revenir du quarré 2916 à ſa racine, on peut raiſonner ainſi.

EXEMPLE I.

2916	54 racine
416	
104	
000	

Commençons par trouver les dixaines de cette racine : or la formation du quarré nous apprend qu'il y a, dans 2916, le quarré de ces dixaines, & que ce quarré ne peut faire partie des deux derniers chiffres ; il eſt donc dans 29 ; & comme la racine quarrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dixaines de la racine, eſt 5, & portons-les à côté de 2916, comme on le voit ci-deſſus.

Je quarre 5, & je retranche le produit 25, de 29 ; il me reſte 4 à côté duquel j'abaiſſe les deux autres chiffres 16 du nombre propoſé 2916.

Pour trouver maintenant, les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reſte 416 ; il ne contient plus que deux parties du quarré ; ſavoir le double des dixaines de la racine, multipliées par les unités, & le quarré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la

premiere ſuffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons ; car puiſqu'elle eſt formée du double des dixaines multipliées par les unités, ſi on la diviſe par le double des dixaines que nous connoiſſons, elle doit (74) donner pour quotient les unités : il ne s'agit donc plus que de ſavoir dans quelle partie de 416 eſt renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités ; or nous avons remarqué ci-deſſus qu'il ne pouvoit faire partie du dernier chiffre ; il eſt donc dans 41 ; il faut donc diviſer 41, par le double 10 des dixaines trouvées ; j'écris donc ſous 41 le double 10 des dixaines, & faiſant la diviſion, le quotient 4 que je trouve eſt le nombre des unités, que je porte à la droite des 5 dixaines trouvées ; enſorte que la racine cherchée eſt 54.

Mais il faut obſerver que quoique le quotient 4 que nous venons de trouver ; ſoit en effet celui qui convient ; cependant il peut arriver quelquefois que le quotient trouvé de cette maniere, ſoit plus fort qu'il ne convient ; parce que 41 (c'eſt-à-dire, la partie qui reſte après la ſéparation du dernier chiffre), renferme non-ſeulement le double des dixaines mul-

tiplié par les unités, mais encore ſes dixaines provenantes du quarré des unités; c'eſt pourquoi, pour n'avoir aucun doute ſur le chiffre des unités, il faut employer la vérification ſuivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4 des unités, & l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dixaines, ce qui fait 104, dont je multiplie ſucceſſivement tous les chiffres par le même nombre 4, & je retranche les produits ſucceſſifs, des parties correſpondantes de 416; comme il ne reſte rien, j'en conclus que la racine eſt en effet 54.

S'il reſtoit quelque choſe, la racine n'en ſeroit pas moins la vraie racine en nombres entiers, à moins que ce reſte ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité; mais c'eſt ce qu'on n'a point à craindre quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enſeigner, eſt fondée ſur la formation même du quarré; car quand on multiplie 104 par 4, il eſt évident qu'on forme le quarré des unités & le double des dixaines multiplié par les unités, c'eſt-à-dire, ce qui complete le quarré parfait.

137. De ce que nous venons de dire, il faut conclure que pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut, après en avoir ſéparé deux ſur la droite, chercher la racine quarrée de la tranche qui reſte à gauche; cette racine ſera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, & on l'écrira à côté du nombre propoſé, en l'en ſéparant par un trait.

On ſouſtraira de cette même tranche le quarré de la racine qu'on vient de trouver, & après avoir écrit le reſte au deſſous de cette tranche, on abaiſſera à côté de ce reſte, les deux chiffres qu'on avoit ſéparés.

On ſéparera, par un point, le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaiſſer, & on diviſera ce qui ſe trouvera ſur la gauche, par le double des dixaines, qu'on écrira au-deſſous.

On écrira le quotient, à côté du premier chiffre de la racine, & on le portera enſuite à côté du double des dixaines qui a ſervi de diviſeur.

Enfin on multipliera par ce même quotient, tous les chiffres qui ſe trouveront ſur cette derniere ligne, & on retran-

chera leurs produits, à meſure qu'on les trouvera, des chiffres qui leur correſpondent dans la ligne au-deſſus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine quarrée de 7569.

```
75.69|87 racine.
116.9
  167
 ----
  000
```

Je ſépare les deux chiffres 69, & je cherche la racine quarrée de 75; elle eſt 8; j'écris 8 à côté, je quarre 8 & je retranche de 75, le quarré 64; il me reſte 11 que j'écris au deſſous de 75, & j'abaiſſe à côté de ce même 11, les chiffres 69 que j'avois ſéparés.

Je ſépare, dans 1169, le dernier chiffre 9, pour avoir dans 116 la partie que je dois diviſer pour trouver les unités.

Je forme mon diviſeur, en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, & j'écris ce diviſeur au-deſſous de 116; la diviſion me donne pour quotient 7 que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte auſſi ce quotient à côté du diviſeur 16 ; je multiplie 167 qui forme la derniere ligne, par ce même quotient 7, & je retranche les produits, à meſure que je les trouve, de 1169 : il ne reſte rien, ce qui prouve que 7569 eſt un quarré parfait & le quarré de 87.

138. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviſer par le double des dixaines, que la ſeule partie qui reſte à gauche, après qu'on a ſéparé le dernier chiffre ; enſorte que ſi elle ne contenoit pas le double des dixaines, il ne faudroit pas, pour cela, employer le chiffre ſéparé ; on mettroit o à la racine. Si au contraire, on trouvoit que le double des dixaines y eſt plus de 9 fois, on ne mettroit cependant pas plus de 9 ; la raiſon en eſt la même que pour la diviſion (66).

139. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire ſur la racine quarrée des nombres qui n'ont pas plus de 4 chiffres, on ſaiſira facilement ce qu'il convient de faire, lorſque le nombre des chiffres eſt plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être compoſée, on peut toujours la concevoir compoſée de deux parties, dont l'une ſoit des

dixaines, & l'autre des unités; par exemple, 874 peut être considéré comme représentant 87 dixaines & 4 unités.

Cela posé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'exposer, on peut aussi trouver le troisieme par la même méthode, en considérant ces deux premiers chiffres, comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, & leur appliquant, pour trouver le troisieme, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrieme, on considérera les trois premiers, comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrieme, le même raisonnement qu'on appliquoit aux deux premiers pour trouver le troisieme, & ainsi de suite.

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche; la derniere pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette préparation est fondée sur ce que, considérant la racine

comme composée de dixaines & d'unités; il faut, suivant ce qui a été dit ci-dessus (135 & *suiv.*) commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite, pour avoir dans la partie qui reste à gauche, le quarré des dixaines; mais comme cette partie est elle-même composée de plus de deux chiffres, un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite, & ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine quarrée de 76807696

```
76.80.76.96 | 8764
128.0
 167
-----
 1117.6
  1746
-----
  7009.6
  17524
-----
  00000
```

Après avoir partagé le nombre proposé, en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche

quelle eſt la racine quarrée de la tranche 76 qui eſt le plus à gauche : je trouve qu'elle eſt 8, & j'écris 8 à côté du nombre propoſé : je quarre 8 & je retranche le quarré 64, de 76; j'ai pour reſte 12 que j'écris au deſſous de 76; à côté de ce reſte j'abaiſſe la tranche 80 dont je ſépare le dernier chiffre par un point; & au deſſous de la partie 128, j'écris 16 double de la racine trouvée; puis diſant, en 128 combien de fois 16? je trouve qu'il y eſt 7 fois : j'écris 7 à la ſuite de la racine 8, & à côté du double 16; je multiplie 167 par ce même nombre 7, & je retranche de 1280 le produit de cette multiplication, il me reſte 111 à côté duquel j'abaiſſe la tranche 76, ce qui forme 11176; je ſépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, & ſous la partie 1117 qui reſte à gauche : j'écris 174, le double de la racine 87 je diviſe 1117 par 174, & ayant trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine & à côté du double 174, je multiplie 1746 par ce même nombre 6, & je retranche de 11176, il reſte 700; à côté de ce reſte, j'abaiſſe 96 dont je ſépare le dernier chiffre; au-deſſous de 7009 qui reſte à gauche, j'écris 1752 double de la racine trouvée 876,

& divifant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine & à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, & je retranche de 70096, il ne refte rien, ainfi la racine quarrée de 76807696 eft exactement 8764.

140. Lorfque le nombre propofé n'eft point un quarré parfait, il y a un refte à la fin de l'opération, & la racine quarrée qu'on a trouvée, eft la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre propofé : alors il n'eft pas poffible d'extraire la racine quarrée exactement; mais on peut en approcher fi près qu'on le juge à propos, c'eft-à-dire, de maniere que l'erreur qui en réfulteroit dans le quarré, foit au deffous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation fe fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la fuite du nombre propofé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine, faire l'opération comme à l'ordinaire, & féparer enfuite par une virgule fur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la fuite du nombre propofé. En effet, (54) le produit de la multiplication devant avoir autant de décimales

qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble, le quarré (dont les deux facteurs sont égaux) doit donc en avoir le double de ce qu'a l'un des facteurs, c'est-à-dire, le double de ce que doit avoir la racine.

EXEMPLE.

On demande la racine quarrée de 87567 à moins d'un millieme près.

Pour faire des milliemes il faut trois décimales; il faut donc mettre six zéros au quarré 87567; ainsi il faut tirer la racine quarrée de 87567000000.

```
8.75.67.00.00.00 | 295917
4 7.4
 4 9
-----------
 346.7
  58 5
-----------
  5420.0
   590 9
-----------
   10190.0
    5918 1
-----------
    427190.0
     59182 7
-----------
     129111
```

En faiſant l'opération comme dans les exemples précédents, on trouve pour racine quarrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917 ; cette racine eſt celle de 87567000000 ; mais comme il s'agit de celle de 87567 ou de 87567,000000 ; je ſépare moitié autant de décimales dans la racine, que j'ai mis de zéros au quarré, ce qui me donne 295,917 pour la racine quarrée de 87567, à moins d'un millieme près.

Pareillement, ſi l'on demande la racine quarrée de 2, à moins d'un dix-millieme près ; on tirera la racine quarrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142 ; ſéparant les quatre chiffres de la droite, par une virgule, on aura 1,4142 pour la racine quarrée de 2, approchée à moins d'un dix-millieme près.

141. On a vu (106) que pour multiplier une fraction par une fraction, il falloit multiplier numérateur par numérateur & dénominateur par dénominateur ; par conſéquent, pour quarrer une fraction, il faut quarrer le numérateur & le dénominateur, ainſi le quarré de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{4}{9}$, celui de $\frac{4}{5}$ eſt $\frac{16}{25}$.

142. Donc réciproquement, pour

tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur; ainsi la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 est 3, & celle de 16 est 4.

143. Mais il peut arriver que le numérateur ou dénominateur, ou tous les deux ne soient point des quarrés parfaits; s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un quarré, on en tirera la racine, approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, & ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur; ainsi si l'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2 qu'on trouvera 1,4 ou 1,41 ou 1,414 ou 1,4142, &c. selon qu'on voudra en approcher plus ou moins; & comme la racine quarrée de 9 est 3, on aura pour racice approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$, &c.

Mais si le dénominateur n'est par un quarré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction, & rendra ce dénominateur quarré; alors on opérera comme dans le

cas précédent. Par exemple, si l'on demande la racine quarrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine quarrée de 15, jusqu'à 3 décimales, par exemple, on aura 3,872; & comme la racine quarrée de 25 est 5; la racine quarrée de $\frac{15}{25}$ sera $\frac{3,872}{5}$.

144. Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois, on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$, uniquement en décimales, en divisant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$ exprimée purement en décimales (99).

145. Enfin si l'on avoit des entiers joints à des fractions, on réduiroit ces entiers en fractions (86), & on opéreroit, comme il vient d'être dit pour une fraction. Ainsi, pour tirer la racine quarrée de $8\frac{3}{7}$, on changeroit $8\frac{3}{7}$, en $\frac{59}{7}$, & celle-ci (143) en $\frac{413}{49}$, dont on trouveroit que la racine approchée est $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

146. On peut aussi réduire en décimales, la fraction qui accompagne l'entier; mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales pair & double de celui qu'on veut avoir à la racine; parce que le produit de la multiplication de deux nombres qui ont des décimales, devant

devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs (54), le quarré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre. En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571 (99), dont la racine est 2,903, comme ci-dessus.

147. Si l'on avoit à tirer la racine quarrée d'une quantité décimale, il faudroit avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas; ce qui se fera, en mettant à la suite de ces décimales 1 ou 3 ou 5, &c. zéros; cela n'en change pas la valeur (30). Ainsi, pour tirer la racine quarrée de 21,935 à moins d'un millieme près; je tire la racine quarrée de 21,935000 qui est 4,683; c'est aussi celle de 21,935. On trouvera de même, que celle de 0,542 est à moins d'un millieme près 0,736, & que celle de 0,0054 est à moins d'un millieme près 0,073.

148. Quand on a trouvé, par la méthode qui vient d'être exposée, les trois premiers chiffres de la racine, on peut en avoir plusieurs autres avec plus de facilité & de promptitude, par la division seule, en cette maniere.

Prenons pour exemple 763703556823 : je commence par cherchet les trois premiers chiffres de la racine, par la méthode ci-dessus : je trouve 873 pour cette racine, & 1574 pour reste : je mets à côté de ce reste, les deux chiffres 55, qui suivent la partie 763703 qui a donné les trois premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres suivants, si

j'avois quatre chiffres de la racine, quatre si j'en avois 5 & ainsi de suite; je divise 157455 que j'ai alors, par le double 1746 de la racine; je trouve pour quotient 90; ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de la racine qui par-là devient 87390. Je quarre cette racine, & je retranche son quarré 7637012100, de la partie 7637035568 dont 87390 est la racine; il me reste 23468.

Si je veux avoir de nouveaux chiffres à la racine; comme j'en ai déjà cinq, je puis, par la seule division, en trouver 4; je mettrai, pour cet effet, à la suite du reste 23468 les deux chiffres restants 23 du nombre proposé, & deux zéros, & divisant 234682300 par le double 174780 de la racine trouvée, j'aurai 1342 pour les quatre nouveaux chiffres que je dois joindre à la racine : mais en partageant le nombre proposé, en tranches, de la maniere qui a été dite ci-dessus, on voit que sa racine ne doit avoir que six chiffres pour les nombres entiers, donc cette racine est 873901,342, à moins d'un millieme près.

On peut, le plus souvent, pousser chaque division jusqu'à un chiffre de plus, c'est-à-dire, jusqu'à autant de chiffres qu'on en a déjà à la racine; mais il y a quelques cas, rares à la vérité, où l'erreur sur le dernier chiffre, pourroit aller jusqu'à cinq unités; au lieu qu'en se bornant à un chiffre de moins, comme nous venons de le faire, on n'a jamais à craindre, même une unité d'erreur sur le dernier chiffre.

Si après avoir trouvé les premiers chiffres de la racine, par la méthode ordinaire, ce qui reste après l'opération faite, se trouvoit égal au double de ces premiers chiffres, il faudroit, pour éviter tout embarras, en déterminer encore un par la même méthode ordinaire, après quoi on trouveroit les autres par la méthode abrégée que nous venons d'exposer, qui, comme on le voit assez, s'applique également aux décimales.

Si la racine devoit avoir des zéros parmi ses chiffres intermédiaires, dans le cas où ces zéros seroient du nombre des chiffres qu'on détermine par la division, il peut arriver, s'ils doivent être les premiers chiffres du quotient, qu'on ne s'en apperçoive pas, parce que dans la division on ne marque pas les zéros qui doivent précéder sur la gauche du quotient; le moyen de le distinguer est de faire attention

qu'on doit avoir toujours autant de chiffres au quotient qu'on en a mis à la ſuite du reſte ; & par conſéquent, quand il y en aura moins, il en faudra compléter le nombre, par des zéros placés ſur la gauche de ce quotient.

Au reſte, l'abrégé que nous venons d'expoſer, eſt une ſuite de ce principe général, qu'il eſt aiſé de déduire de ce qu'on a vu (134) ; ſavoir que le quarré d'une quantité quelconque composée de deux parties, renferme le quarré de la premiere partie, deux fois la premiere partie multipliée par la ſeconde, & le quarré de la ſeconde.

De la formation des Nombres cubes, & de l'extraction de leur Racine.

149. Pour former ce qu'on appelle *le cube* d'un nombre, il faut d'abord multiplier ce nombre par lui-même, & multiplier enſuite, par ce même nombre, le produit réſultant de cette premiere multiplication.

Ainſi le cube d'un nombre eſt, à proprement parler, le produit du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre : 27 eſt le cube de 3, parce qu'il réſulte de la multiplication de 9 (quarré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube eſt donc trois fois facteur dans le cube ; c'eſt pour cette raiſon que le cube eſt auſſi nommé *troiſieme puiſſance* ou *troiſieme degré* de ce nombre.

150. En général, on dit qu'un nom-

bre eſt élevé à la ſeconde, troiſieme, quatrieme, cinquieme, &c. puiſſances, quand on l'a multiplié par lui-même 1, 2, 3, 4, &c. fois conſécutives, ou lorſqu'il eſt 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois &c. facteur dans le produit.

151. La racine cubique d'un cube propoſé, eſt le nombre, qui multiplié par ſon quarré, produit ce cube; ainſi 3 eſt la racine cubique de 27.

152. On n'a donc pas beſoin de regles pour former le cube d'un nombre; mais pour revenir du cube à ſa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui ſe paſſe dans la formation du cube.

Obſervons cependant qu'on n'a beſoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorſque le nombre propoſé a moins de quatre chiffres, car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-deſſous de 1000, & par conſéquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10, c'eſt-à-dire, moins de deux chiffres.

Ainſi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci. . . . .
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

aura ſa racine cubique, en nombre entier, entre les deux nombres correſpondants de cette ſuite.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 dont la premiere contient les cubes.

153. Tout nombre n'a pas de racine cubique ; mais on peut approcher continuellement d'un nombre qui, étant cubé, approche auſſi de plus en plus de reproduire ce premier nombre ; c'eſt ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

154. Voyons donc de quelles parties peut être compoſé le cube d'un nombre qui contiendroit des dixaines & des unités.

Puiſque le cube réſulte du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il eſt eſſentiel de ſe rappeller ici (134) que *le quarré d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, renferme, 1°. le quarré des dixaines, 2°. deux fois le produit des dixaines par les unités, 3°. le quarré des unités.*

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties, par les dixaines & par les unités du même nombre.

Afin d'appercevoir plus diſtinctement les produits qui en réſulteront, donnons

à cette opération simulée, la forme suivante.

1°.

Le quarré des dixaines.	étant multiplié par les dixaines, donnera	Le cube des dixaines.
Deux fois le produit des dixaines par les unités.		Deux fois le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités.
Le quarré des unités.		Le produit des dixaines par le quarré des unités.

2°.

Le quarré des dixaines.	etant multipli par les unités, donnera	Le produit du quarré des dixaines multiplé par les unités.
Deux fois le produit des dixaines par les unités.		Deux fois le produit des dixaines par le quarré des unités.
Le quarré des unités.		Le cube des unités.

Donc en rassemblant ces 6 résultats, & réunissant ceux qui sont semblables, on voit que le cube d'un nombre composé de dixaines & d'unités, contient quatre parties; savoir *le cube des dixaines*, *trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités*, *trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités*, *& enfin le cube des unités*.

Formons, d'après cela, le cube d'un nombre composé de dixaines & d'unités, de 43, par exemple,

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Nous prendrons donc le cube de 4 qui eſt 64 ; mais comme ce 4 eſt des dixaines, ſon cube ſera des mille, parce que le cube 10 eſt 1000, ainſi le cube des 4 dixaines ſera 64000.

3 fois 16 ou 3 fois le quarré des 4 dixaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le quarré de 10 eſt 100 ; ainſi ce produit ſera 14400.

3 fois 4, ou 3 fois les dixaines, étant multipliées par le quarré des unités, donneront des dixaines, & ce produit ſera 1080.

Enfin le cube des unités ſe terminera à la place des unités, & ſera 27.

En réuniſſant ces quatre parties, on aura 79507 pour le cube de 43 ; cube qu'on auroit, ſans doute, trouvé plus facilement, en multipliant 43 par 43, & le produit 1849, encore par 43 ; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnoître, par l'examen des parties qui le compoſent, la maniere de revenir à ſa racine.

155. Cela poſé, voici le procédé de l'extraction de la racine cubique.

EXEMPLE.

Soit donc proposé d'extraire la racine cubique de 79507.

Cube.	Racine.
79.507	43
155.07	
48	

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dixaines de la racine, j'en sépare les trois derniers chiffres, dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris, puisqu'il vaut des mille.

Je cherche la racine cubique de 79, elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4, & j'ôte le produit 64 de 79; il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15, j'abaisse 507, ce qui me donne 15507, dans lequel il doit y avoir 3 fois le quarré des quatre dixaines trouvées, multipliées par les unités que nous cherchons, plus 3 fois ces mêmes dixaines multipliées par le quarré des unités, plus enfin le cube des unités.

Je ſépare les deux derniers chiffres 07 ; la partie 155 qui reſte à gauche, renferme 3 fois le quarré des dixaines multiplié par les unités ; c'eſt pourquoi, afin d'avoir les unités (74), je vais diviſer cette partie 155, par le triple du quarré des 4 dixaines, c'eſt-à-dire, par 48.

Je trouve que 48 eſt 3 fois dans 155, j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine, & connoître le reſte, s'il y en a, nous pourrions compoſer les trois parties du cube qui doivent ſe trouver dans 15507, & voir ſi elles forment 15507, ou de combien elles en différent ; mais il eſt auſſi commode de faire cette vérification, en cubant tout de ſuite 43, c'eſt-à-dire, en multipliant 43 par 43, ce qui produit 1849, & multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainſi 43 eſt exactement la racine cubique.

Si le nombre propoſé a plus de ſix chiffres, on raiſonnera comme dans l'exemple ci-après.

EXEMPLE.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

596.947.688	842
849.47	
192	
592704	
42436.88	
21168	
596947688	
000000000	

On considérera sa racine comme composée de dixaines & d'unités, & par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, ayant plus de 3 chiffres, sa racine en aura plus d'un, & par conséquent elle aura des dixaines & des unités : il faut donc, pour trouver le cube de ces premieres dixaines, séparer les trois chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596 ; elle est 8, j'écris ce 8 à côté. Je cube 8, & je retranche le produit 512, de 596 ; il reste 84 que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84, j'abaiſſe 947, ce qui me donne 84947, dont je ſépare les deux derniers chiffres.

Au-deſſous de la partie 849, j'écris 192 qui eſt le triple quarré de la racine 8, & je diviſe 849 par 192 ; je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, & avoir en même temps le reſte, je cube 84, & je retranche le produit 592704, du nombre 596947 ; j'ai pour reſte 4243.

A côté de ce reſte j'abaiſſe la tranche 688, & conſidérant la racine 84 comme un ſeul nombre qui marque les dixaines de la racine cherchée, je ſépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaiſſée, & je diviſe la partie 42436 par le triple quarré de 84, c'eſt-à-dire, par 21168 ; je trouve pour quotient 2 que j'écris à la ſuite de 84.

Pour vérifier la racine 842 & avoir le reſte, s'il y en a, je cube 842, & je retranche le produit 596947688, du nombre propoſé 596947688 : & comme il ne reſte rien, j'en conclus que 842 eſt la racine exacte de 596947688.

Il faut encore obſerver, 1°. que dans le cours de ces opérations, on ne doit

jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine étoit trop fort ; on s'en appercevroit à ce que la souſtraction ne pourroit ſe faire, & alors on diminueroit la racine ſucceſſivement d'une, 2, 3, &c. unités juſqu'à ce que la souſtraction devînt poſſible.

Lorſque le nombre propoſé n'eſt pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'eſt qu'une racine approchée, & il eſt rare qu'il ſoit ſuffiſant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales ſont encore d'un uſage très-avantageux pour pouſſer cette approximation beaucoup plus loin, & auſſi loin qu'on le déſire, ſans que cependant on puiſſe jamais atteindre à une racine exacte.

156. Pour approcher auſſi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la ſuite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine ; faire l'extraction comme dans les exemples précédents, & après l'opération faite, ſéparer par une virgule ſur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centieme près. Pour avoir des centiemes à la racine, c'est-à-dire, deux décimales, il faut que le cube ou le nombre proposé en ait six (54); il faut donc mettre six zéros à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

```
8.755.000.000 | 2061
--------------------
07.55
12
8000
-----------
 7550.00
 1200
8741816
-------------
  131840.00
  127308
8754552981
---------------
     447019
```

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la derniere tranche 8, elle eſt 2 que j'écris à la racine. Je cube 2 & je retranche le produit de 8; j'ai pour reſte 0, à côté duquel j'abaiſſe la tranche 755, dont je ſépare les deux derniers chiffres 55: au-deſſous de la partie reſtante 7, j'écris 12, triple quarré de la racine, & diviſant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000 que je retranche de 8755; j'ai pour reſte 755, à côté duquel j'abaiſſe la tranche 000, dont je ſépare deux chiffres ſur la droite; au-deſſous de la partie reſtante 7550, j'écris 1200 triple quarré de la racine 20, & diviſant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, & je retranche le produit, de 8755000; j'ai pour reſte 13184 à côté duquel j'abaiſſe la derniere tranche 000, dont je ſépare les deux derniers chiffres. Au-deſſous de la partie reſtante 131840, j'écris 127308 triple quarré de la racine trouvée 206. Je diviſe 131840 par 127308; je trouve pour quotient 1 que j'écris à la ſuite de 206. Je cube 2061, & ayant retranché de 8755000000, le pro-

duit 8754552981; j'ai pour reſte 447019.

La racine cubique approchée de 8755000000, eſt donc 2061; donc celle de 8755,000000 eſt 20,61, puiſque le cube a trois fois autant de décimales que ſa racine (54).

Si l'on vouloit pouſſer l'approximation plus loin, on mettroit à la ſuite du reſte trois zéros, & on continueroit comme on a fait à chaque fois qu'on a abaiſſé une tranche.

157. Puiſque pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur; il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber ſon numérateur & ſon dénominateur. Donc réciproquement, pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur, & la racine cubique du dénominateur. Ainſi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ eſt $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 eſt 3, & celle de 64 eſt 4.

158. Mais ſi le dénominateur ſeul eſt un cube, on tirera la racine approchée du numérateur, & on donnera à cette racine pour dénominateur, la racine cubique du dénominateur. Par exemple,

ſi l'on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$; comme le numérateur n'eſt pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui ſera 5,22 à moins d'un centieme près ; & tirant la racine de 343 qui eſt 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{143}{343}$; ou bien en réduiſant en décimales (99), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centieme près.

159. Si le dénominateur n'eſt pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par le quarré de ce dénominateur, & alors le nouveau dénominateur étant un cube, on ſe conduira comme il vient d'être dit. Par exemple, ſi l'on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$; je multiplie le numérateur & le dénominateur par 49, quarré du dénominateur 7, j'ai $\frac{147}{343}$ qui (88) eſt de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ eſt $\frac{5,27}{7}$, ou en réduiſant purement en décimales, 0,75 ; la racine cubique de $\frac{3}{7}$ eſt donc 0,75 à moins d'un centieme près.

S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on convertiroit le tout en fraction, & l'opération ſeroit réduite à tirer la racine cubique d'une fraction (157 & *ſuiv.*)

On pourroit auſſi, ſoit qu'il y ait des entiers,

entiers, ſoit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales; mais il faut avoir ſoin de pouſſer cette réduction juſqu'à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine. Ainſi, ſi l'on demandoit la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, approchée juſqu'à moins d'un millieme, on changeroit la fraction $\frac{3}{11}$ en 0,272727272; en ſorte que, pour avoir la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, on tireroit celle de 7,272727272 qu'on trouvera être 1,937.

160. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre ſuffiſant de zéros mis à ſa ſuite, de maniere que le nombre de ſes décimales ſoit ou 3 ou 6, ou 9, &c. alors on en tirera la racine, comme s'il n'y avoit pas de virgule; & après l'opération faite, on ſéparera ſur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui ſoit le tiers du nombre des décimales de la quantité propoſée; enſorte que ſi la racine n'avoit pas ſuffiſamment de chiffres pour que cette regle eût ſon exécution, on y ſuppléeroit par des zéros placés ſur la gauche de cette racine. Ainſi pour tirer la racine cubique de 6,54 à moins d'un millieme près, je

mettrai 7 zéros, & je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui sera 1870; j'en séparerai 3 chiffres, puisqu'il y a 9 décimales au cube, & j'aurai, 1,870, ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que celle de 0,0006 approchée à moins d'un centieme près, est 0,08.

161. Quand on a trouvé les quatre premiers chiffres de la racine cubique, par la méthode qu'on vient d'expliquer, on peut trouver les autres plus promptement par la division, & cela de la maniere suivante.

Qu'on demande la racine cubique de . . . . . . 5264627832723456; j'en cherche les quatre premiers chiffres, par la méthode ordinaire; ils sont 1739, & le reste de l'opération est 5681413; à côté de ce reste, je mets les deux chiffres 72 qui suivent la partie 5264627832 qui a donné les quatre premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres qui suivent cette même partie, si la racine trouvée avoit cinq chiffres, & les quatre si elle en avoit six). Je divise 568141372 par 9072363, triple quarré de la racine 1739; j'ai pour quotient 62, & ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de 1739, ensorte que 173962 est, en nombres entiers, la racine cubique du nombre proposé.

Si l'on vouloit pousser plus loin, on cuberoit cette racine, & ayant retranché le produit, du nombre proposé, on mettroit à la suite du reste quatre zéros, & on diviseroit le tout, par le triple du quarré de 173962, ce qui donneroit quatre décimales pour la racine.

On fera ici la même observation qu'on a faite (148) sur le cas où la division ne donne pas autant de chiffres qu'elle doit en donner. Et dans ces divisions on s'aidera de la regle abrégée qui a été donnée (69 & *suiv.*).

Des Raisons, Proportions & Progressions, & de quelques Regles qui en dépendent.

162. Les mots *raison* & *rapport* ont la même signification en Mathématiques, & l'un & l'autre expriment le résultat de la comparaison de deux quantités.

163. Si dans la comparaison de deux quantités, on a pour but de connoître de combien l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme leur *Rapport arithmétique*.

Ainsi, si je compare 15 avec 8, pour connoître leur différence 7; ce nombre 7 qui est le résultat de la comparaison, est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par un point; en sorte que 15.8 marque que l'on considere le rapport arithmétique de 15 à 8.

164. Si dans la comparaison de deux quantités, on se propose de connoître combien l'une contient l'autre, ou est contenue

en elle, le réſultat de cette comparaiſon ſe nomme leur *Rapport Géométrique*. Par exemple, ſi je compare 12 à 3 pour ſavoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois, eſt le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités ſous ce point de vue, on ſépare l'une de l'autre par deux points : cette expreſſion 12 : 3 marque que l'on conſidere le rapport géométrique de 12 à 3.

165. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la premiere, ſe nomme *antécédent*, & la ſeconde ſe nomme *conſéquent*. Ainſi dans le rapport 12 : 3, 12 eſt l'antécédent, & 3 eſt le conſéquent ; l'un & l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

166. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités, il n'y a donc autre choſe à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

167. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviſer l'une par l'autre.

168. Nous évaluerons ce rapport ; dorénavant, en diviſant l'antécédent par le conſéquent, ainſi le rapport de 12 à 3

eſt 4 ; & le rapport de 3 à 12 eſt $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

169. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ſes deux termes ou qu'on en retranche une même quantité, parce que la différence, (en quoi conſiſte le rapport), reſte toujours la même.

170. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on diviſe ſes deux termes par un même nombre : car le rapport géométrique conſiſtant (168) dans le quotient de la diviſion de l'antécédent par le conſéquent, eſt une quantité fractionnaire qui (88) ne peut changer par la multiplication ou la diviſion de ſes deux termes, par un même nombre. Ainſi le rapport 3 : 12 eſt le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2 ; il eſt le même que celui de 1 : 4 que l'on a en diviſant par 3.

171. Cette propriété ſert à ſimplifier les rapports. Par exemple, ſi j'avois à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirois, en réduiſant tout en fraction, ce rapport eſt le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduiſant au même dénominateur, le même que celui de $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin

en ſupprimant le dénominateur 12, (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12,) eſt le même que celui de 81 à 128.

172. Lorſque quatre quantités ſont telles que le rapport des deux premieres, eſt le même que le rapport des deux dernieres, on dit que ces quatre quantités, forment une *proportion ;* & cette proportion eſt arithmétique ou géométrique, ſelon que le rapport qu'on y conſidere eſt arithmétique, ou géométrique.

Les quatre quantités, 7, 9, 12, 14 forment une proportion arithmétique ; parce que la différence des deux premieres eſt la même que celle des deux dernieres. Pour marquer qu'elles ſont en proportion arithmétique, on les écrit ainſi, 7. 9 : 12. 14 ; c'eſt-à-dire, qu'on ſépare, par un point, les deux termes de chaque rapport ; & les deux rapports, par deux points. Le point qui ſépare les deux termes de chaque rapport, ſignifie *eſt à*, & les deux points qui ſéparent les deux rapports, ſignifient *comme ;* enſorte que pour énoncer la proportion ainſi écrite, on dit 7 *eſt à* 9 *comme* 12 *eſt à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20,

forment une proportion géométrique ; parce que 3 eſt contenu dans 15, comme 4 l'eſt dans 20. Pour marquer qu'elles ſont en proportion géométrique, on les écrit ainſi 3 : 15 :: 4 : 20; c'eſt-à-dire, qu'on ſépare les deux termes de chaque rapport par deux points, & les deux rapports par quatre points. Les deux points ſignifient *eſt à*, & les quatre points ſignifient *comme ;* de ſorte qu'on dit 3 *eſt à* 15, *comme* 4 *eſt à* 20.

Il faut ſeulement obſerver que, dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme*, du mot *arithmétiquement*.

173. Le premier & le dernier terme de la proportion ſe nomment les *extrêmes ;* le 2ᵉ & le 3ᵉ ſe nomment les *moyens*.

Comme il y a deux rapports, & par conſéquent deux antécédens & deux conſéquens ; on dit, pour le premier rapport; *premier antécédent, premier conſéquent ;* & pour le ſecond, *ſecond antécédent*, *ſecond conſéquent*.

174. Quand les deux termes moyens d'une proportion ſont égaux, la proportion ſe nomme proportion *continue*, 3 . 7 : 7 . 11 forment une proportion arithmétique continue ; on l'écrit ainſi ÷ 3. 7 . 11 . ; les deux points & la barre qui

précédent, ſont pour avertir que dans l'énoncé, on doit répéter le terme moyen qui eſt, ici, 7.

La proportion 5 : 20 :: 20 : 80 eſt une proportion géométrique continue, que par abréviation on écrit ainſi ∺ 5 : 20 : 80; l'uſage des quatre points & de la barre eſt le même que dans la proportion arithmétique continue.

175. Il ſuit de ce que nous venons de dire ſur les proportions arithmétiques & géométriques.

1°. Que ſi dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou ſi l'on en retranche la différence ou raiſon qui regne dans cette proportion, ſelon que l'antécédent ſera plus grand ou plus petit que ſon conſéquent, chaque antécédent deviendra égal à ſon conſéquent; car c'eſt donner au plus petit terme de chaque rapport, ce qui lui manque pour égaler ſon voiſin; ou retrancher du plus grand, ce dont il ſurpaſſe ſon voiſin: ainſi dans la proportion 3 . 7 : 8 . 12, ajoutez la différence 4 au premier & au troiſieme terme, vous aurez 7 . 7 : 12 . 12, & il eſt aiſé de ſentir que cela eſt général.

2°. Si dans une proportion géométrique

vous multipliez chacun des deux conséquens, par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent : ainsi dans la proportion 12 : 3 :: 20 : 5, multipliez 3 & 5, chacun par 4, & vous aurez 12 : 12 :: 20 : 20. Pareillement, dans la proportion 15 : 9 :: 45 : 27, multipliez 9 & 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez 15 : 15 :: 45 : 45.

Propriétés des Proportions Arithmétiques.

176. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens;* par exemple, dans cette proportion 3 . 7 : 8 . 12, la somme 3 & 12 des extrêmes, & celle 7 & 8 des moyens, sont également 15.

Voici comment on peut s'assurer que cette propriété est générale.

Si les deux premiers termes étoient égaux entr'eux, & les deux derniers égaux aussi entr'eux, comme dans cette proportion :

7 . 7 : 12 . 12.

il eſt évident que la ſomme des extrêmes ſeroit égale à celle des moyens.

Or toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (175) en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui regne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la ſomme des extr mes & celle des moyens, ne peut rien changer à l'égalité de ces deux ſommes ; ainſi ſi elles deviennent égales par cette addition, c'eſt qu'elles étoient égales ſans cette même addition. Le raiſonnement eſt le même pour le cas de la ſouſtraction.

177. Puiſque dans la proportion continue les deux termes moyens ſont égaux, il ſuit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen, ou que le terme moyen eſt la moitié de la ſomme des extrêmes : ainſi pour avoir un moyen arithmétique entre 7 & 15, par exemple ; j'ajoute 7 à 15, & prenant la moitié de la ſomme 22, j'ai 11 pour le terme moyen, en ſorte que $\div$ 7 . 11 . 15.

Propriétés des Proportions Géométriques.

178. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, eſt que *le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens ;* par exemple dans cette proportion 3 : 15 :: 7 : 35, le produit de 35 par 3, & celui de 15 par 7 ſont également 105.

Voici comment on peut ſe convaincre que cette propriété a lieu dans toute proportion géométrique.

Si les antécédens étoient égaux à leurs conſéquens, comme dans cette proportion, 3 : 3 :: 7 : 7.

Il eſt évident que le produit des extrêmes ſeroit égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état, (175) en multipliant les deux conſéquens par la raiſon. Cette multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes ſera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'auroit été, ou ſera un certain nombre de fois plus petit, ſi le rapport eſt une fraction ; mais elle produira le même effet ſur celui des moyens; donc, puiſqu'après cette multiplication,

le produit des extrêmes ſeroit égal au produit des moyens, ces deux produits doivent auſſi être égaux ſans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, & réciproquement.

Donc *dans la proportion continue*, *le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen*; car les deux moyens étant égaux, leur produit eſt le quarré de l'un d'eux. Donc pour avoir un moyen géométrique entre deux nombres propoſés, il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, & tirer la racine quarrée de ce produit. Ainſi pour avoir un moyen géométrique entre 4 & 9, je multiplie 4 par 9, & la racine quarrée 6 du produit 36, eſt le moyen proportionnel cherché.

179. De la propriété fondamentale de la proportion géométrique, il ſuit que ſi connoiſſant les trois premiers termes d'une proportion, on vouloit déterminer le quatrieme, il faudroit *multiplier le ſecond par le troiſieme*, *& diviſer le produit par le premier*; car il eſt évident (74) qu'on auroit le quatrieme terme en diviſant le produit des deux extrêmes, par le premier terme;

or ce produit eſt le même que celui des moyens ; donc on aura auſſi le quatrieme terme, en diviſant le produit des moyens, par le premier terme.

Ainſi ſi l'on demande quel ſeroit le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers ſeroient 3 : 8 :: 12 ; je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je diviſe par 3 ; le quotient 32, eſt le quatrieme terme demandé ; en ſorte que 3, 8, 12, 32 forment une proportion : en effet le premier rapport eſt $\frac{3}{8}$, & le ſecond eſt $\frac{12}{32}$ qui, (89) en diviſant les deux termes par 4, eſt auſſi $\frac{3}{8}$.

Par un ſemblable raiſonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion lorſqu'on en connoît trois. *Si le terme qu'on veut trouver eſt un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, & diviſer par l'extrême connu : ſi au contraire on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, & diviſer par le terme moyen connu.*

180. Cett propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes & celui des moyens, ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique : en effet, ſi l'on avoit quatre quantités qui ne

fussent point en proportion géométrique; en multipliant les conséquens par le rapport des deux premieres, il n'y auroit que le premier antécédent qui deviendroit égal à son conséquent; par exemple, si l'on avoit 3,12,5,10, en multipliant les conséquens 12 & 10 par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 & 12, on auroit 3,3,5,$\frac{10}{4}$ dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes, ne peut être égal à celui des moyens; donc ces produits ne pourroient pas être égaux non plus, quand même on n'auroit pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$: il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités sont en proportion.*

De-là nous concluons cette seconde propriété des proportions.

181. *Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si l'on met les extrêmes à la place des moyens, & les moyens à la place des extrêmes.*

182. La même chose aura lieu, c'est-à-dire, *que la proportion subsistera si l'on échange les places des extrêmes, ou celles des moyens.*

En effet, dans tous ces cas, il eſt aiſé de voir que le produit des extrêmes ſera toujours égal à celui des moyens.

Ainſi la proportion 3 : 8 : : 12 : 32 peut fournir toutes les proportions ſuivantes par la ſeule permutation de ſes termes.

3 : 8 : : 12 : 32
3 : 12 : : 8 : 32
32 : 12 : : 8 : 3
32 : 8 : : 12 : 3
8 : 3 : : 32 : 12
8 : 32 : : 3 : 12
12 : 3 : : 32 : 8
12 : 32 : : 3 : 8

Et il en eſt de même de toute autre proportion.

183. Puiſqu'on peut mettre le troiſieme terme à la place du ſecond, & réciproquement, on doit en conclure *qu'on peut, ſans troubler une proportion, multiplier ou diviſer les deux antécédens par un même nombre, & qu'il en eſt de même à l'égard des conſéquens;* car en faiſant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeront le premier rapport; & les deux conſéquens, le ſecond. Ainſi multiplier les deux antécédens de la premiere

proportion, revient alors, à multiplier les deux termes d'un rapport, chacun par un même nombre; ce qui (170) ne change point ce rapport. Par exemple, ſi j'ai la proportion 3 : 7 : : 12 : 28 ; je puis, en diviſant les deux antécédens, par 3, dire 1 : 7 : : 4 : 28, parce que, de la proportion 3 : 7 : : 12 : 28, on peut (182) conclure 3 : 12 : : 7 : : 28 : & en diviſant les deux termes du premier rapport par 3, 1 : 4 : : 7 . 28, qui (182) peut être changée en 1 . 7 . . 4 . 28.

184. *Tout changement fait dans une proportion, de maniere que la ſomme de l'antecédent & du conſéquent, ou leur différence, ſoit comparée à l'antécédent ou au conſéquent, de la même maniere dans chaque rapport, formera toujours une proportion.*

Par exemple, ſi l'on a la proportion.

12 : 3 : : 32 : 8

on en pourra conclure les proportions ſuivantes.

	12 *plus*	3 : 3 : :	32 *plus*	8 :	8
ou	12 *moins*	3 : 3 : :	32 *moins*	8 :	8
ou	12 *plus*	3 : 12 : :	32 *plus*	8 :	32
ou	12 *moins*	3 : 12 : :	32 *moins*	8 :	32

Car, ſi c'eſt au conſéquent que l'on compare, il eſt facile de voir que l'antécédent augmenté

augmenté ou diminué du conſéquent, contiendra ce conſéquent, une fois de plus, ou une fois de moins qu'auparavant; & comme cette comparaiſon ſe fait de la même maniere pour le ſecond rapport, qui, par la nature de la proportion, eſt égal au premier, il s'enſuit néceſſairement que les deux nouveaux rapports ſeront auſſi égaux entr'eux.

Si c'eſt à l'antécédent que l'on compare; le même raiſonnement aura encore lieu, en concevant que dans la proportion ſur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport, à la place de ſon conſéquent, & le conſéquent à la place de l'antécédent; ce qui eſt permis (181).

185. Puiſqu'en mettant le troiſieme terme d'une proportion à la place du ſecond, & réciproquement, il y a encore proportion (182), on doit conclure que les deux antécédens ſe contiennent l'un l'autre, autant de fois que les conſéquens ſe contiennent auſſi l'un l'autre.

Donc *la ſomme des deux antécédens de toute proportion, contient la ſomme des deux conſéquens, ou eſt contenue en elle, autant*

qu'un des antécédens contient ſon conſéquent ; ou eſt contenu en lui.

Par exemple, dans la proportion :

12 : 3 :: 32 : 8

12 plus 32 : 3 plus 8 :: 32 : 8, ce qui eſt évident.

Mais, pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que ſi le premier antécédent contient le ſecond, quatre fois, par exemple ; la ſomme des deux antécédens contiendra le ſecond, cinq fois ; & par la même raiſon, la ſomme des conſéquens, contiendra le ſecond conſéquent, 5 fois : donc la ſomme des antécédens, contiendra celle des conſéquens, comme le quintuple d'un des antécédens, contient le quintuple de ſon conſéquent, c'eſt-à-dire, (170) comme un des antécédens, contient ſon conſéquent.

On prouveroit de même, que la différence des antécédens, eſt à la différence des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent.

186. Il eſt évident que la propoſition qu'on vient de démontrer, revient à celle-ci, ſi on a deux rapports égaux, par exemple, celui de . . . 4 : 12
& celui de . . . . 7 : 21

11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, & conséquent à conséquent.

Donc, *si l'on a plusieurs rapports égaux; la somme de tous les antécédens, est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens, est à son conséquent.* Par exemple, si on a les rapports égaux 4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6; on peut dire que 4 *plus* 7 *plus* 2, sont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, &c.

Car après avoir ajouté, entr'eux, les antécédens des deux premiers rapports, & leurs conséquens aussi entr'eux, le nouveau rapport, qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisieme; par conséquent on pourra le combiner de même avec celui-ci, & il en résultera encore le même rapport, & ainsi de suite.

187. On appelle *Rapport composé*, celui qui résulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports dont on multiplie les antécédens entr'eux, & les conséquens entr'eux. Par exemple, si l'on a les deux rapports 12 : 4 & 25 : 5; le produit des antécédens 12 & 25, sera 300, celui des conséquens 4 & 5, sera 20, le rapport

de 300 à 20, eſt ce qu'on appelle rapport compoſé des rapports de 12 à 4, & de 25 à 5.

188. Ce rapport eſt le même que ſi l'on avoit évalué ſéparément chacun des rapports compoſans, & qu'on eût multiplié, entr'eux, les nombres qui expriment ces rapports ; en effet, le rapport de 12 à 4 eſt 3, celui de 25 à 5 eſt 5 ; or 3 fois 5 font 15 qui eſt le rapport de 300 à 20, & on peut voir que cela eſt général, en faiſant attention que le rapport eſt meſuré (168) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, & le conſéquent pour dénominateur : ainſi le rapport compoſé doit être une fraction qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, & pour dénominateur le produit des deux conſéquens ; c'eſt donc (106) le produit des deux fractions qui expriment les rapports compoſans.

189. Si les rapports que l'on multiplie ſont égaux, le rapport compoſé eſt dit *rapport doublé*, ſi l'on n'a multiplié que deux rapports ; *rapport triplé*, ſi l'on en a multiplié trois ; *quadruplé*, ſi l'on en a multiplié quatre, & ainſi de ſuite. Par exemple, ſi l'on multiplie le rapport de

2 à 3, par celui de 4 à 6, qui lui eſt égal; on aura le rapport compoſé 8 : 18 qui ſera dit rapport *doublé* du rapport de 2 à 3, ou de 4 à 6.

190. *Si l'on a deux proportions, & qu'on les multiplie par ordre; c'eſt-à-dire, le premier terme de l'une, par le premier terme de l'autre, le ſecond par le ſecond, & ainſi de ſuite; les quatre produits qui en réſulteront, ſeront en proportion.*

Car en multipliant ainſi deux proportions, c'eſt multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux (172); donc les deux rapports compoſés qui en réſultent, doivent être égaux; donc les quatre produits doivent être en proportion (172).

191. Concluons de-là que *les quarrés, les cubes, & en général les puiſſances ſemblables de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion;* puiſque, pour former ces puiſſances, il ne faut que multiplier la proportion, par elle-même, pluſieurs fois de ſuite.

192. *Les racines quarrées, cubiques; & en général les racines ſemblables de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion;* car le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, n'eſt autre choſe

que la racine quarrée du rapport de ces deux termes (142 & 167) ; & il en eſt de même du rapport des racines quarrées des deux derniers termes : donc, puiſque les deux rapports primitifs ſont ſuppoſés égaux, leurs racines quarrées ſont égales, donc le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, ſera égal au rapport des racines quarrées des deux derniers. On prouvera, de même, pour les racines cubique, quatrieme, &c.

Uſages des Propoſitions précédentes.

193. Les propoſitions que nous venons de démontrer, & qu'on appelle les *Regles des Proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons, ici, à celles qui appartiennent à l'Arithmétique, & nous commencerons par celle qu'on peut faire de ce qui a été établi (179), & qui eſt la baſe de preſque toutes les autres.



De la Regle de Trois *directe & simple.*

194. On diſtingue pluſieurs ſortes de Regles de *Trois* : elles ont toutes pour objet de faire connoître un terme d'une proportion dont on en connoît trois.

Celle qu'on appelle *Regle de trois directe & ſimple*, eſt nommée *ſimple*, parce que l'énoncé des queſtions auxquelles on l'applique, ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois ſont connues, & la quatrieme eſt à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y conſidere, il y en a toujours deux, qui non-ſeulement ſont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de maniere que, de même qu'une des quantités contient l'autre, ou eſt contenue en elle, de même auſſi la quantité relative à la premiere, contient la quantité relative à la ſeconde, ou eſt contenue en elle ; c'eſt-à-dire, d'une maniere plus abrégée, qu'une quantité & ſa relative peuvent toujours être, toutes deux, ou antécédens ou conſéquens dans la proportion, ce qui n'a pas lieu dans la regle de Trois inverſe, comme nous le verrons dans peu.

La méthode, pour trouver le quatrieme terme d'une proportion, & par conséquent pour faire la regle de Trois directe & simple, est suffisamment exposée (179); mais il est à propos de faire connoître, par quelques exemples, l'usage qu'on peut faire de cette regle.

EXEMPLE I.

40 Ouvriers ont fait, en un certain tems, 268 toises d'ouvrage; on demande combien 60 Ouvriers pourroient en faire dans le même tems?

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des Ouvriers; ensorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, &c. le premier doit devenir aussi double, triple, quadruple, &c. Ainsi l'on voit que le nombre de toises cherché, doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60, relatif au premier, contient le nombre 40 relatif au second: il faut donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.......

40 : 60 : : 268T :

Ou, (en divisant ces deux premiers

termes par 20, ce qui eſt permis (170)), par ces trois autres.....................

2 : 3 : : 268^{T} :

Ainſi, ſelon ce qui a été dit (179), je multiplie 268^{T}, par 3, & je diviſe le produit 804, par 2; ce qui donne pour quotient, 402^{T}; & par conſéquent 402^{T} pour l'ouvrage que feroient les 60 Ouvriers.

EXEMPLE II.

Un navire a fait, avec le même vent, 275 lieues en 3 jours; on demande en combien de tems il en feroit 2000, toutes les autres circonſtances demeurant les mêmes.

Il eſt évident qu'il faut plus de tems, à proportion du nombre de lieues; & que par conſéquent, le nombre de jours cherché, doit contenir 3 jours, autant que 2000 lieues contiennent 275 lieues: il faut donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci......

275 : 2000 : : 3 :

Multipliant 2000 par 3, & diviſant le produit 6000 par 275, on aura $21^{\text{jours}} \frac{9}{11}$.

EXEMPLE III.

$52^T\ 4^P\ 5^p$ d'ouvrage ont été payées $168^{tt}\ 9^f\ 4^d$; on demande combien on doit payer pour $77^T\ 1^P\ 8^p$?

Le prix de $77^T\ 1^P\ 8^p$ doit contenir le prix $168^{tt}\ 9^f\ 4^d$ des $52^T\ 4^P\ 5^p$, autant que $77^T\ 1^P\ 8^p$ contiennent $52^T\ 4^P\ 5^p$. Il faut donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci. . . . .

$$52^T\ 4^P\ 5^p : 77^T\ 1^P\ 8^p :: 168^{tt}\ 9^f\ 4^d :$$

C'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier $168^{tt}\ 9^f\ 4^d$ par $77^T\ 1^P\ 8^p$, & diviſer le produit par $52^T\ 4^P\ 5^p$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (122 & 128).

Mais il ſera encore plus ſimple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite eſpece, c'eſt-à-dire, en pouces ; & la queſtion ſera réduite à chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois autres. . . . .

$$3797 : 5564 :: 168^{tt}\ 9^f\ 4^d :$$

Alors multipliant $168^{tt}\ 9^f\ 4^d$ par 5564 ; on aura $937348^{tt}\ 10^f\ 8^d$; & diviſant par 3797, le quotient $246^{tt}\ 17^f\ 3^d\ \frac{2780}{3797}$ ſera ce qu'on doit payer pour les $77^T\ 1^P\ 8^p$.

S'il y avoit des fractions ; après avoir

réduit les deux termes de même eſpece, à leur plus petite unité, comme dans cet exemple, on ſimplifieroit le rapport de ces deux termes de la maniere qui a été enſeignée (171).

De la Regle de Trois *inverſe & ſimple.*

195. La regle de *Trois inverſe & ſimple*, differe de la regle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que, des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la queſtion pour laquelle on fait cette opération, les deux principales doivent ſe contenir l'une l'autre, dans un ordre tout oppoſé à celui des deux autres quantités qui leur ſont relatives ; enſorte que, lorſque par l'examen de la queſtion, on a donné, à ces quantités, la diſpoſition convenable pour former une proportion, l'une des quantités principales, & ſa relative, forment les extrêmes ; & l'autre quantité principale, avec ſa relative, forment les moyens.

Au reſte, cela n'introduit aucune différence dans la maniere de faire l'opération, c'eſt toujours le quatrieme terme

d'une proportion, qu'il s'agit de trouver ; ou du moins, on peut toujours amener la chose à ce point.

Quelques Arithméticiens ont prescrit, pour le cas présent, une regle assujettie à l'énoncé de la question : nous ne suivrons point leur exemple, c'est la nature de la question, & non pas son énoncé, (qui souvent est vicieux), qui doit diriger dans la résolution.

EXEMPLE I.

30 Hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours ; combien faudroit-il d'hommes, pour faire le même ouvrage en 10 jours ?

On voit qu'il faut, dans ce second cas, d'autant plus d'hommes, que le nombre de jours est moindre ; ainsi le nombre d'hommes cherché, doit contenir le nombre de 30 hommes, autant que le nombre 25 de jours, relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci. . . . .

$$10^{j} : 25^{j} :: 30^{hom.}$$

C'eſt-à-dire, de multiplier 30 par 25, & de diviſer le produit 750 par 10 ; ce qui donne 75 ou $75^{\text{hom.}}$

EXEMPLE II.

Un Equipage n'a plus que pour 15 jours de vivres ; mais les circonſtances doivent lui faire tenir encore la mer pendant 20 jours ; on demande à combien on doit réduire la totalité des rations, par jour ?

Repréſentons par l'unité, la totalité des vivres que l'on conſomme par jour ; on voit que ce à quoi on doit ſe reſtraindre, doit être d'autant moindre que cette unité, que le nombre 20 des jours, pendant leſquels cette économie doit durer, eſt plus grand que le nombre de 15 jours ; que par conſéquent, de même que 20 jours contiennent 15 jours, de même la totalité des vivres que l'on auroit conſommés pendant chacun de ces 15 jours, doit contenir celle des vivres que l'on conſommera pendant chacun des 20 jours : il faut donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par les trois ſuivans.......

$20^{j} : 15^{j} :: 1 :$

Ce quatrieme terme ſera $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$; il faut

donc se réduire aux $\frac{3}{4}$ de ce qu'on auroit consommé par jour.

De la Regle de Trois *composée.*

196. Dans les deux regles de Trois que nous venons d'exposer, la quantité cherchée & la quantité de même espece qui entre dans l'énoncé de la question, ont entr'elles un rapport simple & déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la question.

Dans la regle de Trois composée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même espece qui entre dans l'énoncé de la question, n'est pas donné par le rapport simple de deux autres quantités seulement, mais par plusieurs rapports simples qu'il s'agit de composer (187) d'après l'examen de la question.

Quand une fois ces rapports ont été composés, la regle est réduite à une regle de Trois simple : les exemples suivans vont éclaircir ce que nous disons.

EXEMPLE.

30 Hommes ont fait 132 toises d'ou-

vrage, en 18 jours, combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-ſeulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un & à l'autre, il faut conſidérer que 30 hommes travaillant pendant 18 jours, ne font qu'autant que 18 fois 30 hommes; c'eſt-à-dire, que 540 hommes qui travailleroient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant 28 jours, ne font qu'autant que feroient 28 fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La queſtion eſt donc changée en celle-ci: 540 hommes ont fait 132 toiſes d'ouvrage, combien 1512 hommes en feroient-ils dans le même tems? c'eſt-à-dire, qu'il faut chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci......

$$540^h : 1512^h :: 132^T :$$

Multipliant 1512 par 132, & diviſant le produit, par 540, on trouvera pour réponſe à la queſtion, $369^T\ 3^P\ 7^p\ 2^l\frac{2}{5}$.

EXEMPLE II.

Un homme marchant 7 heures par jour; a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchoit 10 heures par jour, combien emploieroit-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vîtesse.

S'il marchoit pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploieroit d'autant plus de jours, qu'il y a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures, chaque jour, dans le second cas, il lui faudroit moins de tems par cette raison; ainsi l'opération tient en partie à la regle de Trois directe, & en partie à la regle de Trois inverse.

On la réduira à une regle de Trois simple, en considérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures, ou 210 heures; ainsi on peut changer la question en cette autre : il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues; combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues? Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui satisfait à cette question; en le divisant par 10, on aura le nombre de jours demandé

demandé, puiſque l'homme, dont il s'agit, emploie dix heures par jour.

Ainſi il faut chercher le quatrieme terme de la proportion, dont les trois premiers ſont .....

$230^{l} : 600^{l} :: 210^{h} :$

On trouvera que ce quatrieme terme eſt 547 heures & $\frac{19}{23}$, leſquelles diviſées par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours & $\frac{180}{230}$ ou $54 \frac{18}{23}$.

De la Regle de Société.

197. La Regle de Société eſt ainſi nommée parce qu'elle ſert à partager, entre pluſieurs aſſociés, le bénéfice ou la perte réſultant de leur ſociété.

Son but eſt de partager un nombre propoſé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La regle que l'on donne pour cet effet, eſt fondé ſur ce que nous avons établi (186) : nous allons la déduire de ce principe dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE I.

Suppoſons, par exemple, qu'il s'agiſſe

de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2, l'énoncé de la queſtion fournit ces deux proportions.

4 : 3 : : la premiere partie, eſt à la ſeconde.
4 : 2 : : la premiere partie, eſt à la troiſieme.

Ou (182) ces deux autres. . . . . . .

4 eſt à la premiere partie : : 3 eſt à la ſeconde.
4 eſt à la premiere partie : : 2 eſt à la troiſieme.

De ſorte qu'on a ces trois rapports égaux; 4 eſt à la premiere partie : : 3 eſt à la ſeconde : : 2 eſt à la troiſieme.

Or on a vu (186) que la ſomme des antécédens de pluſieurs rapports égaux, eſt à la ſomme des conſéquents, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent; on peut donc dire ici, que la ſomme 9 des trois parties proportionelles à celles que l'on cherche, eſt à la ſomme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionelles, eſt à la partie de 120 qui lui répond.

La regle ſe réduit donc, 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données; 2°. à faire autant de regles de Trois, qu'il y a de parties à trouver, & dont chacune aura, pour premier terme, la ſomme des parties proportionnelles

données ; pour second terme, le nombre proposé à diviser ; & pour troisieme terme l'une des parties proportionnelles données ; ainsi dans la question que nous avons prise pour exemple, on auroit ces trois regles de Trois à faire.

9 : 120 : : 4 :
9 : 120 : : 3 :
9 : 120 : : 2 :

Dont on trouvera (179) que les quatriemes termes sont $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$ qui ont entr'eux les rapports demandés, & qui composent, en effet, le nombre 120.

Mais il est aisé de remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire autant de regles de Trois qu'il y a de parties à trouver : on peut se dispenser de la derniere, en retranchant du nombre proposé, la somme des autres parties, quand on les a trouvées.

EXEMPLE II.

Trois personnes ont à partager le bénéfice de la prise d'un vaisseau. La premiere a fait un fonds de 20000[tt], la seconde de 60000[tt], la troisieme de 120000[tt] ; on demande ce qui revient à chacune, sur la

prise estimée 800000 liv. tous frais faits.

On voit qu'il s'agit de partager 800000# en parties, qui aient entr'elles, les mêmes rapports que 20000, 60000, 120000, ou (170) que 2, 6, 12, puisque chacun doit avoir proportionnellement à sa mise; il faut donc ajouter les trois parties proportionnelles 2, 6, 12, & faire les trois proportions suivantes, ou seulement deux.

20 : 800000 : : 2#: la premiere partie.
20 : 800000 : : 6#: la seconde partie.
20 : 800000 : : 12#: la troisieme partie.

Ces trois parties seront 80000#, 240000#, 480000#.

La question pourroit être plus compliquée, & cependant être ramenée aux mêmes principes, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE III.

Trois personnes ont mis en société; la premiere 3000#, qui ont été pendant six mois dans la société; la seconde, 4000 qui y ont été pendant cinq mois; & la troisieme, 8000# qui y ont resté pendant neuf mois; combien chacun doit-il avoir sur le bénéfice qui monte à 12050#?

On réduira toutes les mises à un

même temps, en cette maniere :

La mise de 3000₶ a dû produire pendant 6 mois, autant que 6 fois 3000 ou 18000₶, pendant un mois.

La mise de 4000₶ a dû produire, pendant 5 mois, autant que 5 fois 4000₶ ou 20000₶, pendant un mois.

Enfin la mise de 8000₶ a dû produire en 9 mois, autant que 9 fois 8000₶ ou 72000₶, pendant un mois.

Ainsi la question est réduite à cette autre ; les mises des trois Associés sont 18000₶, 20000, 72000₶ ; combien revient-il à chacun sur le gain 12050₶.

En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on trouvera 1971₶ 16^{s} $4^{d}\frac{4}{11}$, 2190₶ 18^{s} $2^{d}\frac{2}{11}$, 7887₶ 5^{s} $5^{d}\frac{5}{11}$.

Remarque au sujet de la Regle précédente.

198. Il n'est pas inutile d'examiner un cas qui peut embarrasser les Commençans. Si l'on proposoit cette question, partager 650 en trois parties, dont la premiere soit à la seconde : : 5 : 4, & dont la premiere soit à la troisieme : : 7 : 3.

On ne peut pas appliquer, ici, la regle

précédente, ſans une préparation qui conſiſte à rendre la même, dans chaque rapport donné, la partie proportionnelle de l'une des trois parts cherchées ; par exemple, celle de la premiere : cela s'exécute aiſément, en multipliant les deux termes de chaque rapport, par le premier terme de l'autre rapport ; ainſi les deux rapports 5 : 4 & 7 : 3, ſeront ramenés à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes du premier par 7, & les deux termes du ſecond par 5, ce qui n'en change pas la valeur (170), & donne les rapports 35 : 28 & 35 : 15, enſorte que la queſtion ſe réduit à partager 650, en trois parties qui ſoient entr'elles comme les nombres 35, 28 & 15 ; ce qui ſe fera aiſément par la regle précédente.

Si l'on demandoit de partager un nombre en quatre parties, dont la premiere fût à la ſeconde : : 5 : 4, la premiere à la troiſieme : : 9 : 5 ; & la premiere à la quatrieme : : 7 3 ; on réduiroit ces rapports à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes, des deux autres ; ainſi dans cet exemple on changeroit ces trois rapports, en ces trois autres,

315 : 252, 315 : 175, 315 : 135; enforte que la queſtion ſe réduit à partager le nombre propoſé, en quatre parties qui ſoient entr'elles comme les nombres 315, 252, 175 & 135.

De quelques autres Regles dépendantes des Proportions:

* 199. Quoique les regles ſuivantes ſoient d'un uſage moins fréquent que les précédentes, nous ne pouvons cependant les omettre abſolument : outre qu'elles ne ſont pas ſans utilité par elles-mêmes, elles ſont d'ailleurs propres à faire ſentir les uſages des proportions.

200. La premiere dont nous parlerons, eſt la Regle *d'une fauſſe poſition.* On l'applique ſouvent à réſoudre des queſtions, qui appartiennent à la regle de Société, dont elle differe en ce qu'au lieu de prendre les parties proportionnelles telles qu'elles ſont données par l'énoncé de la queſtion, elle en prend une arbitrairement, & y ſubordonne les autres conformément à la queſtion; ce qui rend le calcul un peu plus facile.

EXEMPLE I.

Partager 640[tt], à trois perſonnes, dont la ſeconde ait le quadruple de la premiere, & la troiſieme deux fois & $\frac{1}{3}$, autant que les deux autres enſemble.

Je prends arbitrairement, pour repréſenter la premiere partie, le nombre 3, dont je puis prendre commodément le $\frac{1}{3}$.

La premiere partie étant 3, la ſeconde ſera 12, & la troiſieme 35.

La queſtion eſt réduite à partager 640; en trois parties qui ſoient entr'elles comme les trois nombres 3, 12 & 35, ce qui ſe fera comme il a été dit (197).

La regle de fauſſe poſition ſert auſſi à réſoudre des

queſtions qui ſont, en quelque façon, l'inverſe de celles de la regle de Société ; puiſqu'il s'agit de revenir de la ſomme de quelques parties d'un nombre, à ce nombre même comme dans l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE II.

On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ & les $\frac{3}{7}$ faſſent 808. Je prends un nombre dont je puiſſe avoir commodément le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ & les $\frac{3}{7}$; (ce qui eſt facile en multipliant les trois dénominateurs). Ce nombre ſera 105 ; j'en prends le $\frac{1}{3}$ qui eſt 35, le $\frac{1}{5}$ qui eſt 21, & les $\frac{3}{7}$ qui ſont 45 ; j'ajoute ces trois nombres, & j'ai 101 qui eſt composé des parties de 105, de la même maniere que 808 l'eſt de celles du nombre en queſtion ; donc le nombre en queſtion doit avoir même rapport à 808, que 105 à 101 ; il doit donc être le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci . . . .

101 : 105 : : 808 :

Ce quatrieme terme eſt 840, dont 808 renferme en effet le $\frac{1}{3}$ le $\frac{1}{5}$ & les $\frac{3}{7}$.

201. La ſeconde regle dont nous parlerons, eſt celle de deux fauſſes poſitions.

Elle ſert dans les queſtions où il s'agit de partager, non pas le nombre même propoſé, mais ſeulement une partie de ce nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés ; l'exemple ſuivant fera connoître la regle & ſon uſage.

EXEMPLE III.

Il s'agit de partager 6954^{tt}, entre trois perſonnes, de maniere que la ſeconde ait autant que la premiere, & 54^{tt} de plus ; & que la troiſieme ait autant que les deux autres enſemble, & 78^{tt} de plus.

Sans les 54 & 78^{tt}, il eſt clair qu'il ne s'agiroit que de partager le nombre propoſé, en parties proportionnelles aux nombres 1, 1 & 2 ; mais puiſqu'il faut prélever ſur la ſomme, 54^{tt} pour la ſeconde perſonne, & 54^{tt} plus 78^{tt} pour la troiſieme ; il eſt évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre propoſé, qu'on doit partager en parties proportion-

nelles à 1, 1 & 2 : comme cette partie qui est facile à trouver dans l'exemple actuel, peut être plus difficile à appercevoir dans d'autres circonstances, on suit la méthode que voici.

Supposons, pour la premiere part, tel nombre que nous voudrons, par exemple, 1tt ; la seconde part sera 1tt plus 54tt ; c'est à-dire, 55tt ; & la troisieme sera 1tt plus 55tt plus 78tt ; c'est-à-dire, 134 : la totalité de ces parts est 190tt.

S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1, 1 & 2 ; la premiere part étant toujours supposée 1tt, la seconde seroit 1tt, la troisieme seroit 2tt, & la totalité seroit 4tt, dont la différence avec 190tt, c'est-à-dire, 186tt, est ce qu'il faut prélever sur la somme proposée 6954tt, ce qui la réduit à 6768 ; il reste donc à partager 6768tt en parties proportionnelles à 1, 1 & 2, selon les regles ci-dessus ; & ayant trouvé que la premiere partie est 1692tt, on en conclura que les deux autres parts demandées sont 1746tt & 3516tt ; en effet la totalité de ces trois parts est 6954tt.

202. On trouve encore, chez les Arithméticiens, plusieurs autres regles qui ne sont autre chose que l'application des regles de Trois, à différentes questions telles que les questions d'*Intérêt*, de *Change*, d'*Escompte*, &c.

Nous n'entrerons pas dans ces détails qui ne peuvent avoir de difficulté pour ceux qui, ayant bien saisi les principes établis ci-dessus, auront en même temps l'état de la question présent à l'esprit. Nous nous bornerons à un seul exemple.

Une personne a fait à un Marchand, un billet de 2854tt, payable dans un an ; elle vient acquitter son billet au bout de 7 mois, & le Marchand consent de diminuer, pour les 5 mois restants, les intérêts qui ont été compris dans le billet, à raison de 6 pour 100 pour 12 mois ; on demande pour quelle somme le Marchand doit rendre ce billet.

Puisque 12 mois produisent 6 pour 100 d'intérêt, 7 mois ont dû produire un intérêt qu'on trouvera en cherchant le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont . . . .

$12 : 7 :: 6 :$

Ce quatrieme terme sera $\frac{42}{12}$ ou $3\frac{1}{2}$. Or, quand l'intérêt a

été pris à 6 pour 100, on a compté pour 106^{tt}, ce qui ne valoit que 100; donc quand l'intérêt eſt à $3\frac{1}{2}$, on compte pour $103\frac{1}{2}$, ce qui ne vaut que 100; il faut donc actuellement que ce qui devoit être payé 106, ne ſoit plus payé que $103\frac{1}{2}$. Ainſi la ſomme cherchée doit être le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers ſont . . .

$$106 : 103\tfrac{1}{2} :: 2854^{tt} :$$

Ce quatrieme terme qui eſt $2786^{tt}\ 13^{f}\ 9^{d}\frac{30}{106}$ ou $\frac{15}{53}$, eſt la ſomme que le débiteur doit donner pour retirer ſon billet.

De la Regle d'Alliage.

203. Les queſtions qui appartiennent à cette regle, ſont de deux ſortes.

Dans l'une il s'agit de trouver la valeur moyenne de pluſieurs ſortes de choſes, dont le nombre & la valeur particuliere de chacune, ſont connus.

Dans la ſeconde, il s'agit de connoître les quantités de chaque eſpece de choſes qui entrent dans un ou pluſieurs mêlanges, lorſqu'on connoît le prix ou la valeur de chaque eſpece, & le prix ou la valeur totale de chaque mêlange.

Nous réſervons les queſtions de la ſeconde ſorte, pour ſervir d'application dans l'Algebre.

Quant aux queſtions de la premiere, voici la regle pour les réſoudre.

Multipliez la valeur de chaque eſpece de choſes, par le nombre des choſes de

cette eſpece ; ajoutez tous les produits, & diviſez la ſomme, par le nombre total des choſes de toutes les eſpeces.

EXEMPLE.

On emploie 200 Ouvriers, dont 50 ſont payés à raiſon de 40 ſols par jour, 70 à raiſon de 30 ſols, 50 à raiſon de 25 ſols : & 30 à raiſon de 20 ſols ; à combien chaque Ouvrier revient-il par jour, l'un portant l'autre ?

50 Ouvriers à 40^{s} par jour ſont une

dépenſe de	2000^{s}
70 à 30^{s}	2100
50 à 25	1250
30 à 20	600
	5950^{s}

La dépenſe des 200 Ouvriers eſt donc de 5950^{s} par jour ; & par conſéquent, (en diviſant par 200), chaque Ouvrier revient, l'un portant l'autre, à 29^{s} 9^{d} par jour. Les autres queſtions de cette eſpece ſont ſi faciles à réſoudre d'après cet exemple, que nous croyons à propros de ne pas inſiſter ſur cette matiere.



Des Progreſſions Arithmétiques.

204. La progreſſion Arithmétique eſt une ſuite de termes dont chacun ſurpaſſe celui qui le précede, ou en eſt ſurpaſſé, de la même quantité.

Par exemple, cette ſuite. . . . . ÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25, &c. eſt une progreſſion Arithmétique ; parce que chaque terme y ſurpaſſe celui qui le précede, d'une même quantité qui eſt ici 3.

Les deux points ſéparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la Progreſſion, ſont deſtinés à marquer qu'en énonçant cette Progreſſion, on doit répéter chaque terme ; excepté le premier & le dernier, en cette maniere, 1 *eſt à* 4, comme 4 *eſt à* 7 ; *comme* 7 *eſt à* 10, &c.

La Progreſſion eſt dite *croiſſante* ou *décroiſſante*, ſelon que les termes vont en augmentant ou en diminuant ; mais comme les propriétés de l'une & de l'autre ſont les mêmes, en changeant ſeulement les mots *plus* en *moins*, ou *ajouter* en *ſouſtraire*, nous la conſidérerons ici uniquement comme croiſſante.

205. On voit donc, d'après la définition de la Progreſſion Arithmétique, qu'avec le premier terme & la différence commune, ou la raiſon de la Progreſſion, on peut former tous les autres termes, en ajoutant conſécutivement cette raiſon; & que par conſéquent :

Le ſecond terme eſt compoſé du premier, plus la raiſon.

Le troiſieme compoſé du ſecond, plus la raiſon, & par conſéquent du premier, plus deux fois la raiſon.

Le quatrieme eſt compoſé du troiſieme, plus la raiſon; & par conſéquent, du premier, plus trois fois la raiſon, & ainſi de ſuite.

206. De ſorte qu'on peut dire, en général, qu'*un terme quelconque d'une Progreſſion Arithmétique, eſt compoſé du premier, plus autant de fois la raiſon qu'il y a de termes avant lui.*

207. Donc ſi le premier terme étoit zéro, tout autre terme de la Progreſſion ſeroit égal à autant de fois la raiſon, qu'il y auroit de termes avant lui.

208. Ce principe peut avoir les deux applications ſuivantes.

1°. Il ſert à trouver un terme quel-

conque d'une Progreſſion, ſans qu'on ſoit obligé de calculer ceux qui le précédent: qu'on demande, par exemple, quel ſeroit le 100e terme de cette Progreſſion....

$\div 4 : 9 : 14 : 19 : 24$, &c.

Puiſque ce terme cherché doit être le centieme, il a donc 99 termes avant lui; il eſt donc compoſé du premier terme 4 & de 99 fois la raiſon 5; il eſt donc 4 plus 495, c'eſt-à-dire, 499.

209. 2°. Ce même principe ſert à lier deux nombres quelconques, par une ſuite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de maniere que le tout forme une Progreſſion Arithmétique; ce qu'on appelle *inſérer* entre deux nombres donnés, pluſieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou ſimplement pluſieurs *moyens arithmétiques.*

Par exemple, on peut lier 1 & 7, par cinq nombres qui faſſent une Progreſſion Arithmétique avec 1 & 7; ces nombres ſont 2, 3, 4, 5, 6; mais comme il n'eſt pas toujours aiſé de voir, du premier coup d'œil, quels doivent être ces nombres, voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poſer.

Il ne s'agit que de trouver la raiſon

qui doit régner dans cette Progreſſion.

Or le plus grand des deux nombres propoſés, devant être le dernier terme de la Progreſſion, doit être compoſé du premier, c'eſt-à-dire, du plus petit de ces deux nombres; plus autant de fois la raiſon qu'il y a de termes avant lui; donc ſi du plus grand de ces deux nombres, on retranche le plus petit, le reſte ſera compoſé d'autant de fois la raiſon qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand; c'eſt-à-dire, qu'il eſt le produit de la multiplication de cette raiſon par le nombre des termes qui précédent le plus grand; donc (74) ſi l'on diviſe ce reſte, par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raiſon.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, eſt plus grand d'une unité que les nombres des moyens qu'on veut inſérer entre les deux; donc, *pour inſérer, entre deux nombres donnés, tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand; & diviſer le reſte, par le nombre des moyens augmenté d'une unité*. Le quotient ſera la différence ou la raiſon qui doit régner dans la Progreſſion.

Par exemple, ſi entre 4 & 11, on demande d'inſérer 8 moyens arithmétiques ; je retranche 4 de 11, il me reſte 7 que je diviſe par 9, nombre des moyens augmenté de l'unité, le quotient $\frac{7}{9}$ eſt la différence qui doit régner dans la Progreſſion qui ſera par conſéquent. . . . .

$\div 4 \cdot 4\frac{7}{9} \cdot 5\frac{5}{9} \cdot 6\frac{3}{9} \cdot 7\frac{1}{9} \cdot 7\frac{8}{9} \cdot 8\frac{6}{9} \cdot 9\frac{4}{9} \cdot 10\frac{2}{9} \cdot 11$.

Pareillement, ſi l'on demandoit neuf moyens arithmétiques entre 0 & 1, retranchant 0 de 1, il reſte 1 qu'il faudroit diviſer par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité ; ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0, 1 pour la raiſon. Et par conſéquent la Progreſſion ſera $\div$ 0. 0, 1. 0, 2. 0, 3. 0, 4. 0, 5. 0, 6. 0, 7. 0, 8. 0, 9. 1.

210. On voit par-là, qu'entre deux nombres, ſi voiſins qu'ils puiſſent être l'un de l'autre, on peut toujours inſérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage ſur les Progreſſions Arithmétiques que nous ne traitons ici que par rapport aux Logarithmes dont nous parlerons plus bas ; nous aurons occaſion d'y revenir ailleurs.

Des Progressions Géométriques.

211. La Progression Géométrique est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précede, ou est contenu en lui, le même nombre de fois. Par exemple cette suite.........................

$\div\!\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192

est une Progression Géométrique ; parce que chaque terme contient celui qui le précede, le même nombre de fois qui est ici 2.

Ce nombre de fois est ce qu'on appelle *la raison* de la Progression.

Les quatre points qui précedent la Progression, ont la même signification que les deux points qui précedent la Progression Arithmétique (204). Mais on en met quatre pour avertir que la Progression est Géométrique.

La Progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous considérerons toujours la Progression Géométrique, comme croissante, parce que les propriétés sont les mêmes dans l'une & dans l'autre, en changeant le mot

de *multiplier* en celui de *diviſer*, & celui de *contenir*, en ceux de *être contenu.*

Puiſque le ſecond terme contient le premier, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raiſon, il eſt donc compoſé du premier multiplié par la raiſon.

Puiſque le troiſieme terme contient le ſecond, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raiſon, il eſt donc compoſé du ſecond multiplié par la raiſon, & par conſéquent du premier multiplié par la raiſon, & encore multiplié par la raiſon; c'eſt-à-dire, du premier multiplié par le quarré, ou la ſeconde puiſſance de la raiſon.

Puiſque le quatrieme terme contient le troiſieme, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raiſon, il eſt donc compoſé du troiſieme multiplié par la raiſon, & par conſéquent du premier multiplié par le quarré de la raiſon, & encore multiplié par la raiſon; c'eſt-à-dire, multiplié par le cube, ou la troiſieme puiſſance de la raiſon.

Par exemple, dans *la Progreſſion ci-deſſus;* 6 eſt compoſé du premier terme 3 multiplié par la raiſon 2; 12 eſt compoſé du premier terme 3 multiplié par le quarré 4

de la raiſon 2; 24 eſt compoſé du premier terme 3 multiplié par le cube 8 de la raiſon 2.

212. En continuant le même raiſonnement, on voit qu'*un terme quelconque de la Progreſſion Géométrique, eſt compoſé du premier multiplié par la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui précedent ce terme quelconque.*

Donc, ſi le premier terme de la Progreſſion eſt l'unité, chaque autre terme ſera formé de la raiſon même élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui le précedent; car la multiplication par le premier terme qui eſt l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puiſſance propoſée; à la ſeptieme, par exemple, il faut, ſuivant l'idée que nous avons donnée des puiſſances, multiplier ce nombre par lui-même, ſix fois conſécutives; ainſi pour élever 2 à la ſeptieme puiſſance, je dirois 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8, 2 fois 8 font 16, 2 fois 16 font 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, qui ſeroit la ſeptieme puiſſance de 2; mais on peut abréger l'opération en diverſes manieres; par exemple, je puis d'abord quarrer 2,

ce qui fait 4, cuber ce 4, ce qui donne 64, & le multiplier par 2, ce qui fait 128; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8, quarrer 8, ce qui donne 64, & multiplier 64 par 2, ce qui donne 128; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 se trouve 7 fois facteur dans le produit.

213. Le principe que nous venons de poser (212) sur la formation d'un terme quelconque de la Progression, & la remarque que nous venons de faire, peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra de la Progression, sans être obligé de calculer ceux qui le précedent : si l'on demande, par exemple, quel seroit le douzieme terme de la Progression. . . .

$\div\!\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24, &c.

Comme je sais (212) que ce douzieme terme doit être composé du premier, multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précedent ce douzieme, je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzieme puissance de la raison 2; pour former cette onzieme puissance, je cube 2, ce qui me donne 8, je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvieme puissance,

& enfin je multiplie 512, neuvieme puiſſance de la raiſon, par 4, ſeconde puiſſance, & j'ai 2048 pour la onzieme puiſſance de 2; je multiplie donc 2048 par 3, & j'ai 6144 pour le douzieme terme de la Progreſſion.

214. Une autre application qu'on peut faire du même principe; c'eſt pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra, entre deux nombres donnés. Si l'on demandoit trois moyens géométriques entre 4 & 64; avec un peu d'attention, on voit que ces trois moyens géométriques ſont 8, 16, 32; en effet ∺ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 forment une Progreſſion Géométrique; mais ſi l'on propoſoit d'autres nombres que 4 & 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouveroit pas auſſi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La queſtion ſe réduit à trouver la raiſon qui doit régner dans la Progreſſion; parce que, quand elle ſera trouvée, on formera aiſément les termes, par des multiplications ſucceſſives par cette raiſon.

Qu'il ſoit queſtion, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 & 2048.

2048 ſera donc le dernier terme d'une Progreſſion Géométrique qui commence par 2, & qui doit avoir neuf termes entre le premier & le dernier. 2048 eſt donc compoſé du premier terme 2 multiplié par la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc (69), ſi l'on diviſe 2048 par le premier terme, le quotient ſera la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui doivent précédes 2048; donc en cherchant quelle eſt la racine de cette puiſſance, on aura la raiſon: or cette puiſſance doit être la dixieme, puiſque devant y avoir neuf termes entre 2 & 2048, il y en a néceſſairement dix avant 2048: donc il faut extraire la racine dixieme du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048 diviſé par le plus petit 2.

215. Comme on peut faire le même raiſonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, *pour inſerer entre deux nombres donnés, tant de moyens géométriques qu'on voudra; il faut diviſer le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient; on extraira, de ce quotient, une racine du degré marqué par*

le nombre des moyens augmenté de l'unité.

Ainſi, pour revenir à notre exemple; je diviſe 2048 par 2 ; ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixieme *, elle eſt 2 ; donc la raiſon eſt 2 : ainſi pour former les moyens en queſtion, je multiplie le premier terme 2 continuellement par la raiſon 2; & après avoir formé neuf moyens, je retombe ſur 2048, comme on le voit ici.........................

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Pareillement, ſi l'on demandoit de trouver quatre moyens géométriques entre 6 & 48, je diviſerois 48 par 6, & du quotient 8 je tirerois la racine cinquieme ; comme 8 n'a pas de racine cinquieme exacte, on ne peut jamais aſſigner exactement en nombres, quatre moyens géomé-

* Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixieme d'un nombre ; mais il en eſt de celle-ci comme de la racine quarrée & de la racine cubique : la racine quarrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorſque le nombre propoſé n'en a pas plus de deux; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorſque le nombre propoſé n'en a pas plus de trois ; pareillement la racine dixieme n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre propoſé n'en aura pas plus de dix ; il en eſt de même pour les autres racines; la trentieme, par exemple, n'aura qu'un chiffre, ſi le nombre propoſé n'a pas plus de trente chiffres; cela ſe démontre comme on l'a fait pour la racine quarrée & la racine cubique.

triques entre 6 & 48 ; mais on peut approcher de cette racine, si près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine quarrée & de la racine cubique, & que nous ferons connoître dans l'Algebre. En attendant, il suffit qu'on conçoive qu'il est possible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois de suite par lui-même, approche de plus en plus de reproduire 8 ; & qu'il en est de même pour tout autre nombre & pour toute autre racine ; & de-là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, soit exactement, soit par une approximation poussée à tel degré qu'on voudra, & c'est tout ce qu'il nous faut pour passer aux Logarithmes.

Des Logarithmes.

216. Les *Logarithmes* sont des nombres en Progression Arithmétique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en Progression Géométrique. Si l'on a, par exemple, la Progression Géométrique & la Progression Arithmétique suivantes.................

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, &c.
÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. &c.

Chaque terme de la ſuite inférieure, eſt dit le logarithme du terme qui eſt à pareille place dans la ſuite ſupérieure.

217. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puiſqu'à la même Progreſſion Géométrique on peut faire correſpondre une infinité de Progreſſions Arithmétiques différentes. Comme nous ne conſidérons ici les logarithmes, que par rapport à l'uſage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à conſidérer les différentes progreſſions Géométriques & Arithmétiques qu'on pourroit comparer entr'elles ; nous paſſons tout de ſuite à celles qu'on a conſidérées dans la formation des tables de logarithmes.

218. On a choiſi pour Progreſſion Géométrique, la Progreſſion décuple ; & pour Progreſſion Arithmétique, la ſuite naturelle des nombres, c'eſt-à-dire, qu'on a choiſi les deux Progreſſions ſuivantes. . . . .

∺ 1:10:100:1000:10000:100000:1000000
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

219. Ainſi il ſera toujours aiſé de

reconnoître quel eſt le logarithme de l'unité ſuivie de tant de zéros qu'on voudra, il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la ſuite de cette unité.

Nous n'enſeignerons pas ici la méthode qu'on a ſuivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires de la Progreſſion décuple ; elle dépend de principes que nous ne pouvons expoſer ici ; mais nous allons expliquer leur formation par une voie, qui, à la vérité, ne ſeroit pas la plus expéditive pour calculer ces logarithmes, mais qui ſuffit, tant pour concevoir cette formation, que pour rendre raiſon des uſages auxquels on emploie ces nombres artificiels.

220. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple, il faut que ce nombre puiſſe faire partie de la Progreſſion Géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voie pas que 3 puiſſe faire partie de la Progreſſion Géométrique ∺ 1 : 10 : 100, &c. cependant on voit que ſi entre 1 & 10, on inſéroit un très-grand nombre de moyens géométriques (214) comme on monteroit alors de 1

à 10 par des degrés d'autant plus ſerrés que le nombre de ces moyens ſeroit plus grand, il arriveroit de deux choſes l'une, ou que quelqu'un de ces moyens ſe trouveroit être préciſément le nombre 3 ; ou que du moins, il s'en trouveroit deux conſécutifs, entre leſquels le nombre 3 ſeroit compris, & dont chacun différeroit d'autant moins de 3, que le nombre des moyens inſérés ſeroit plus grand.

Cela poſé, ſi l'on inſéroit pareillement entre 0 & 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inſéré de moyens géométriques entre 1 & 10, chaque terme de la Progreſſion Géométrique ayant pour logarithme, le terme correſpondant de la Progreſſion Arithmétique, on prendroit dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouveroit à pareille place que 3 ſe trouve dans la Progreſſion Géométrique ; ou ſi 3 n'étoit pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci, on prendroit dans la Progreſſion Arithmétique, le terme qui répondroit à celui de la Progreſſion Géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

C'eſt ainſi qu'on pourroit s'y prendre en effet, ſi l'on n'avoit pas de moyens

plus expéditifs ; quoi qu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

221. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 & 10, pareil nombre entre 10 & 100, pareil nombre entre 100 & 1000, &c. on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 & 1, pareil nombre entre 1 & 2, pareil nombre entre 2 & 3 ; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, & tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la premiere, le nombre le plus approchant de 2 ; & on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant ; qu'on a cherché de même dans la premiere, le nombre le plus approchant de 3, & qu'on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant ; qu'on en a fait de même, successivement, pour les nombres 4, 5, 6, &c. qu'enfin ayant transporté dans une même colonne, comme on le voit dans la Table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la Progression Arithmétique, qu'on a trouvés correspondans à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchoient le plus ; alors

on aura l'idée de la formation des logarithmes, & de leur diſpoſition dans les Tables ordinaires.

Table des Logarithmes des Nombres naturels depuis 1 *juſqu'à* 200.

Nombres.	*Logarith.*	*Nombres.*	*Logarith.*	*Nombres.*	*Logarith.*	*Nombres.*	*Logarith.*
0	Infini nég.	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
2	0,301030	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,602060	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
7	0.845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,903090	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
9	0.954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,995635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,113943	43	1,633468	73	1,863323	103	2,012837
14	1,146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255273	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,053078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1.929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1.934498	116	2,064458
27	1,431364	57	1,755875	87	1.939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
120	2,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	2,155336	163	2,212188	183	2,262451
124	2,093422	144	2,158362	164	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,267172
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2,271842
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,274158
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,276462
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,278754
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,281033
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	192	2,283301
133	2,123852	153	2.184691	173	2,238046	193	2,285557
134	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	2,287802
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2.290035
136	2,133539	156	2,193125	176	2.245513	196	2,292256
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,294466
138	2,139879	158	2,198657	178	2,250420	198	2,296665
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,298853
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,301030

Les Logarithmes renfermés dans cette Table, n'ont que ſix chiffres après la virgule ; ils en ont ſept dans les Tables ordinaires ; mais cette différence ne nuit en rien à l'uſage que nous en ferons ci-après.

222. Remarquons au ſujet de cette Table, que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme, s'appelle la *Caractériſtique ;* parce que c'eſt par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade eſt compris le nombre auquel appartient ce logarithme ; par exemple, ſi un nombre a pour caractériſtique 3, je ſais qu'il appartient à des mille, parce que le loga-

rithme de 1000 eſt 3, & que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 juſqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme que 3 & une fraction; il a donc 3 pour caractériſtique, & les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés des Logarithmes.

223. Comme il ne s'agit ici que des logarithmes tels qu'ils ſont dans les Tables ordinaires, les propriétés que nous allons expoſer, ne regardent que les Progreſſions Géométriques qui ont l'unité pour premier terme; & les Progreſſions Arithmétiques qui ont zéro pour premier terme.

Comparons donc encore, terme à terme, une Progreſſion Géométrique quelconque, mais dont le premier terme ſoit l'unité, avec une Progreſſion Arithmétique auſſi quelconque, mais dont le premier terme ſoit zéro; par exemple, les deux Progreſſions ſuivantes . . . .

÷÷ 1 : 3 : 9:27:81:243:729:2187:6561, &c.

÷ 0 . 4 . 8. 12.16 20 . 24 . 28 . 32 , &c.

Il ſuit de la nature & de la correſpon-

dance parfaite de ces deux Progreſſions ; qu'autant de fois la raiſon de la premiere eſt facteur dans l'un quelconque des termes de cette Progreſſion, autant de fois la raiſon de la ſeconde eſt contenue dans le terme correſpondant de cette ſeconde ; par exemple, dans le terme 2187, la raiſon 3 eſt ſept fois facteur, & dans le terme 28, la raiſon 4 eſt contenue ſept fois.

En effet, ſelon ce qui a été dit (206 & 212), la raiſon eſt facteur dans un terme quelconque de la premiere, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là ; & dans la ſeconde, un terme quelconque eſt compoſé d'autant de fois la raiſon qu'il y a de termes avant lui. Or il y a le même nombre de termes de part & d'autre.

Concluons de-là, qu'un terme quelconque de la Progreſſion Géométrique, aura toujours pour correſpondant dans la Progreſſion Arithmétique, un terme qui contiendra la raiſon de celle-ci, autant de fois que la raiſon de la premiere eſt facteur dans le terme quelconque dont il s'agit.

224. Donc, *ſi l'on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la Progreſſion Géométrique, & ſi l'on ajoute en même tems les deux termes*

termes correſpondans de la progreſſion arithmétique, le produit & la ſomme ſeront deux termes qui ſe correſpondront dans ces progreſſions.

Car il eſt évident que la raiſon ſera facteur dans le produit, autant qu'elle l'eſt, tant dans l'un des termes multipliés, que dans l'autre; & que la raiſon de la progreſſion arithmétique ſera contenue dans la ſomme, autant qu'elle l'eſt, tant dans l'un des termes ajoutés, que dans l'autre.

225. Donc on peut, par l'addition ſeule de deux termes de la progreſſion arithmétique, connoître le produit des deux termes correſpondans de la progreſſion géométrique, en ſuppoſant ces deux progreſſions prolongées ſuffiſamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 & 24 qui répondent à *9* & 729; j'ai 32 qui répond à *6561*; d'où je conclus que le produit de 729 par *9*, eſt *6561*, ce qui eſt en effet.

226. Donc, puiſque les nombres naturels qui compoſent la premiere colonne de la Table ci-deſſus, ont été tirés d'une progreſſion géométrique, qui commence par l'unité; & puiſque leurs logarithmes

ſont les termes correſpondants d'une progreſſion arithmétique qui commence par zéro ; il faut en conclure, qu'*en ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De-là il eſt aiſé de conclure les uſages ſuivants.

Uſages de Logarithmes.

227. *Pour faire une multiplication par logarithmes ; il faut ajouter le logarithme du multiplicande, au logarithme du multiplicateur ; la ſomme ſera le logarithme du produit ; c'eſt pourquoi cherchant cette ſomme parmi les logarithmes des Tables, on trouvera le produit à côté*, par exemple, ſi l'on propoſe de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite table ci-deſſus que le logarithme de 14 eſt 1,146128
& que celui de 13 . . . . . eſt 1,113943

La ſomme 2,260071
Répond dans la même table au nombre 182 qui eſt effet le produit.

228. Pour quarrer un nombre, il ſuffit donc de doubler ſon logarithme ; puiſqu'il faudroit ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

229. Par une raiſon ſemblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler ſon logarithme ; & en général, pour élever un nombre à une puiſſance quelconque, il faudra prendre ſon logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puiſſance ; c'eſt-à-dire, multiplier ſon logarithme, par le nombre qui marque cette puiſſance ; par exemple, pour élever un nombre à la ſeptieme puiſſance, il faudra multiplier par 7, le logarithme de ce nombre.

230. Donc réciproquement, pour extraire la racine quarrée, cubique, quatrieme, &c. d'un nombre propoſé, il faudra diviſer le logarithme de ce nombre, par 2, 3, 4, &c., c'eſt-à-dire, en général, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, ſi l'on demande la racine quarrée de 144, ayant trouvé, dans la table, que le logarithme de ce nombre eſt 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181 ; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit ſe trouve 1,079181 ; il répond à 12, qui eſt par conſéquent la racine quarrée de 144.

Si l'on demande la racine ſeptieme de

128, je cherche, dans la table, ſon logarithme que je trouve être 2,107210; j'en prends le ſeptieme, ou je le diviſe par 7, & je cherche à quoi répond dans la table, le quotient 0.301030, il répond à 2 qui eſt en effet la racine ſeptieme de 128.

231. *Pour trouver le quotient de la diviſion d'un nombre, par un autre; il faut retrancher le logarithme du diviſeur, du logarithme du dividende; chercher dans la table à quel nombre répond le logarithme reſtant, ce nombre ſera le quotient.*

Par exemple ſi l'on veut diviſer 187 par 17, je cherche dans la table, les logarithmes de ces deux nombres, & je trouve . . . .

le logarithme de 187 2,271842
celui de 17 1,230449

La différence 1,041393
Répond, dans la Table, à 11 qui eſt en effet le quotient.

Si la diviſion ne pouvoit pas être faite exactement, le logarithme reſtant ne ſe trouveroit qu'en partie dans la table; mais nous allons enſeigner, ci-après, ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raiſon de cette regle eſt fondée ſur

ce que le quotient multiplié par le diviſeur, devant reproduire le dividende (74), le logarithme du quotient, ajouté, (227) au logarithme du diviſeur, doit donc compoſer le logarithme du dividende ; & par conſéquent le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviſeur.

232. D'après ce que nous venons de dire, il eſt très-facile de voir que pour faire une regle de Trois par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du ſecond terme, au logarithme du troiſieme ; & de la ſomme, retrancher le logarithme du premier.

233. Remarquons que lorſqu'on cherche dans les tables ordinaires, un logarithme réſultant de quelques opérations ſur d'autres logarithmes, ſi l'on ne trouve de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme, & celui de la table, que ſur le dernier chiffre ſeulement, on doit regarder cette différence comme nulle ; parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la progreſſion décuple, ne ſont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du ſeptieme ordre près.

Des Nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.

234. Les fractions & les nombres entiers joints à des fractions n'ont pas leurs logarithmes dans les tables ; il en est de même des racines quarrées, cubiques, &c. des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si l'on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction, (86), & ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du nouveau numérateur. Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$, je cherche celui de $\frac{91}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91, le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$, puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'est autre chose que 91 divisé par 11 (96).

235. La même raison prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillemedt le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur ; mais comme cette souf-

traction ne peut ſe faire, puiſque le logarithme du dénominateur ſera plus grand que celui du numérateur; on retranchera au contraire le logarithme du numérateur de celui du dénominateur; le reſte, qui marquera ce dont il s'en faut que la ſouſtraction n'ait pu ſe faire, ſera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce reſte un ſigne qui marque que la ſouſtraction n'a pas été entiérement faite. Ce ſigne eſt celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainſi le logarithme de la fraction $\frac{11}{91}$ ſeroit — 0,917648 *.

236. Ce ſigne eſt deſtiné à rappeller dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés, ſelon une regle toute oppoſée à celle que nous avons preſcrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'eſt-à-dire, que, ſi l'on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction; ſi au contraire l'on a à diviſer par

* Les nombres précédés du ſigne — ſe nomment nombres *negatifs*. Nous les ferons connoître plus particuliérement dans l'Algebre : en attendant, nous prévenons que c'eſt en prendre une idée fauſſe, que de les regarder comme des nombres au-deſſous de zéro. Il n'y a rien au-deſſous de zéro.

une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction revient à multiplier par le numérateur, & à diviser ensuite par le dénominateur; donc, lorsqu'on opere par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, & retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur : or cet excès est précisément le logarithme de la fraction. A l'égard de la division, la raison en est aussi facile à saisir : en effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (109) à multiplier par $\frac{4}{3}$; donc, en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire, (234) la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée, au logarithme de son numérateur.

237. Il peut arriver, & il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction, l'entier & la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre

qui paſſe les limites des tables ; par exemple, ſi l'on demande le logarithme de $53\frac{821}{5704}$, ce nombre réduit en fraction, revient à $\frac{303133}{5704}$, dont le numérateur paſſe les limites des tables les plus étendues.

Il eſt donc à propos de ſavoir comment on peut trouver le logarithme d'un nombre qui paſſe ces limites.

La méthode que nous allons donner, n'eſt pas rigoureuſe ; mais elle eſt plus que ſuffiſante pour les uſages ordinaires. Avant que de l'expoſer, obſervons :

238. 1°. Qu'en ajoutant 1, 2, 3, &c. unités, à la caractériſtique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, &c. puiſque c'eſt ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, &c. (219 & 227).

2°. Au contraire, ſi l'on retranche 1, 2, 3, &c. unités, de la caractériſtique d'un logarithme, c'eſt diviſer le nombre correſpondant par 10, 100, 1000, &c.

239. Cela poſé, qu'il ſoit queſtion de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je ſéparerai par une virgule, ſur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il eſt néceſſaire pour que le reſte puiſſe

ſe trouver dans les tables *. Ici, par exemple, j'en ſéparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui (28) eſt 100 fois plus petit que le nombre propoſé 357859.

Je cherche dans les tables, le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403; je prends en même tems à côté de ce logarithme **, la différence 1214, entre ce même logarithme & celui de 3579, après quoi, je fais cette regle de Trois: ſi pour une unité de différence entre les deux nombres 3579 & 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes;

Combien pour 0,59 différence entre les deux nombres 3578, 59 & 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes, c'eſt-à-dire, que je cherche le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers ſont ....

1 : 1214 :: 0,59 :

Ce quatrieme terme eſt 716,26, ou ſimplement 716, en négligeant les déci-

* Nous ſuppoſons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires des logarithmes. On en trouvera dans le *Traité de Navigation*, qui fait le ſixieme volume de ce Cours. Celles de M. Rivard & celles de feu M. l'Abbé de la Caille ſont exactes & commodes.

** Ces différences ſe trouvent dans les Tables, à côté des logarithmes mêmes.

males; j'ajoute donc 7:6 au logarithme 3,553643 de 3578, & j'ai 3,5537119 pour logarithme de 3578,59; il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver; & on aura 5,5537119, pour le logarithme cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578,59.

Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite, étoient tous des zéros; après avoir trouvé, dans les tables, le logarithme de la partie qui reste à gauche, il n'y auroit autre chose à faire qu'à ajouter autant d'unités à la caractéristique, qu'on auroit séparé de zéros.

240. S'il s'agit du logarithme d'un nombre accompagné de décimales, on cherchera ce logarithme, comme si le nombre proposé n'avoit point de virgule; & après l'avoir trouvé, soit immédiatement dans les tables, soit par la méthode qu'on vient de donner (239), on ôtera autant d'unités à la caractéristique, qu'il y a de décimales dans le nombre proposé, parce qu'ayant considéré le nombre, comme s'il n'avoit point de virgule; c'est-à-dire, comme 10, ou 100, ou 1000, &c.

fois plus grand qu'il n'eſt, on doit le rappeller à ſa valeur par une diminution convenable ſur la caractériſtique de ſon logarithme (238).

241. Enfin, s'il n'y a que des décimales dans le nombre propoſé; on cherchera encore ce nombre dans les tables, comme s'il n'avoit pas de virgule; & ayant pris le logarithme correſpondant, on le retranchera d'autant d'unités qu'il y a de décimales dans ce même nombre; & on fera précéder le reſte du ſigne —; par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3, qui eſt 0,477121; je le retranche de deux unités, & appliquant au reſte le ſigne —, j'ai — 1,522879 pour logarithme de 0,03. En effet, 0,03 n'eſt autre choſe que $\frac{3}{100}$; or, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{100}$, il faut (235) retrancher le logarithme de 3, de celui de 100, & appliquer au reſte le ſigne —.

Des Logarithmes dont les Nombres ne ſe trouvent point dans les Tables.

242. Cette recherche n'eſt pas moins néceſſaire que la précédente. Par exem-

ble ; pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier ; or si l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les tables, le logarithme restant, que quand le quotient sera un nombre entier : il y a une infinité d'autres cas de la même espèce.

243. Proposons-nous d'abord de trouver à quel nombre répond un logarithme proposé, soit qu'il excéde les limites des tables, soit qu'il tombe entre les logarithmes des tables.

On retranchera de la caractéristique, autant d'unités qu'il sera nécessaire, pour qu'on puisse trouver, dans les tables, les premiers chiffres du logarithme proposé, ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les tables, le nombre cherché, sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les tables, mais en mettant à sa suite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique (238).

Par exemple, le logarithme 7,2273467 se trouve, (après avoir ôté trois unités à la caractéristique), répondre au nombre 16879 ; j'en conclus que le logarithme proposé 7,2273467, répond à 16879000.

Si l'on ne trouve, dans les tables, que les

premiers chiffres du logarithme, on se conduira comme dans l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à sa caractéristique ; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 & 1751 ; le nombre auquel il répond est donc 1750 & une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme 3,2432768, le logarithme de 1750 ; & j'ai pour différence 2288.

Je prends aussi dans les tables, la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 & 1750, après quoi je fais cette regle de Trois.

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 & 1750,

Répondent à une unité de différence entre ces nombres,

A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2288 entre mon logarithme & celui de 1750?

Je trouve pour quatrieme terme $\frac{2288}{2481}$; ainsi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre 1750 $\frac{2288}{2481}$, à très-peu de chose près ; par conséquent le logarithme propo-

ſé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand (238), a pour nombre correſpondant $175000\frac{228800}{2481}$, c'eſt-à-dire $175092\frac{548}{2481}$, ou en réduiſant en décimales, il a pour nombre correſpondant 175092,22.

244. Si le logarithme propoſé tomboit entre ceux des tables, il n'y auroit aucune unité à retrancher à la caractériſtique, & par conſéquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on feroit d'ailleurs de la même maniere.

245. Mais comme la proportion que nous employons dans cette méthode, n'eſt pas rigoureuſement exacte *, & qu'elle n'approche de la vérité, qu'autant que les nombres cherchés ſont grands ; ſi le logarithme propoſé tomboit au-deſſous de celui de 1500; il faudroit, pour plus d'exactitude, ajouter à ſa caractériſtique autant d'unités qu'on pourroit le faire ſans paſſer les bornes des tables; & ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans les tables, on en ſépareroit ſur la droite, autant de chiffres par une virgule,

* Cette proportion ſuppoſe que les différences des logarithmes ſont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'eſt jamais exactement vrai, mais approche aſſez, quand les nombres ſont un peu grands, & cela ſuffit pour les uſages ordinaires.

qu'on auroit ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent ; mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (243), & réduisant le quatrieme terme en decimales, on mettra celles-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 & de 4, & que le nombre auquel il appartient, est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique; c'est-à-dire, que je cherche 3,5432725 ; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 & 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millieme près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme & celui de 3493, c'est-à-dire, 739 ; je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 & 3493, & je chercherai, en raisonnant comme ci-dessus (243), le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci . . . .

1243 : 1 : : 739 :

Ce

Ce quatrieme terme, évalué en décimales, eſt 0,594; donc le nombre cherché eſt 3,493594.

Au reſte, cette ſeconde approximation eſt bornée, parce que les logarithmes des tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du ſeptieme ordre près, les différences ſont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pouſſer l'approximation avec confiance, juſqu'à trois décimales: au ſurplus il eſt rare qu'on ait beſoin d'aller juſques-là. La remarque que nous faiſons, doit diriger auſſi dans l'uſage que nous avons fait ci-deſſus (239 & 243), de la même proportion.

246. Si l'on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif propoſé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, &c. unités, ſelon l'étendue des tables; & après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme reſtant, on en ſéparera ſur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y aura eu d'unités dans le nombre dont aura retranché le logarithme.

Par exemple, ſi l'on demande à quelle fraction appartient — 1,532732, je re-

tranche 1,532732 de 4, & il me reste 2,467268 qui dans les tables se trouve entre les logarithmes de 293 & de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est entre 0,0294, & 0,0293; c'est-à-dire, qu'elle est 0,0293, à moins d'un dix-millieme près. En effet, retrancher de 4, le logarithme proposé 1,532732, c'est (236) multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme proposé, ou (ce qui est la même chose), c'est multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve est 10000 fois trop grand, il faut donc le compter pour des dix-milliemes.

Tout ce que nous venons de dire, trouvera abondamment des applications par la suite. Bornons-nous, quant à présent, à donner une idée, par quelques exemples, des avantages que les logarithmes procurent pour la facilité & la promptitude des calculs.

EXEMPLE I.

On demande le quotient de 17954 divisé par 12836, approché jusqu'à moins d'un dix-millieme près.

Logarithme de 17954 . . 4,254161
Logarithme de 12836 . . 4,108430

reste 0,145731

Ce reste, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc (258) le quotient cherché est 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millieme près.

Le logarithme de 53 est 1,724276
Son tiers (230) est 0,574759

Ce dernier cherché dans les tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, répond à 3756, donc (238) la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (156). Il ne faut pas pour cela regarder cette derniere comme inutile; car elle s'étend à une infinité de nombres auxquels les logarithmes n'atteindroient pas, par rapport aux bornes des Tables.

EXEMPLE III.

Veut-on avoir, à moins d'un centieme près, la racine cinquieme du cube de 5736 ?

On triplera le logarithme 3,758609, de 5736, & on aura 11,275827, pour logarithme du cube de 5736. Prenant le cinquieme de ce dernier logarithme, on a 2,255165, pour logarithme de la racine cinquieme du cube de 5736. Ce logarithme, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de deux unités, pour avoir des centiemes, répond entre les nombres 17995 & 17996; la racine cherchée est donc 179,95 à moins d'un centieme près.

EXEMPLE IV.

Qu'il soit question de trouver quatre moyens proportionnels géométriques, entre $2\frac{2}{3}$, & $5\frac{3}{4}$?

Il faudroit (215) pour avoir la raison qui doit régner dans la Progression, diviser $5\frac{3}{4}$ par $2\frac{2}{3}$, & extraire la racine cinquieme du quotient.

Par logarithmes, cette opération est très-simple. Je détermine par les tables, le logarithme de $5\frac{3}{4}$ ou $\frac{23}{4}$; c'est 0,759668.

Je détermine pareillement le logarithme de $2\frac{2}{3}$; c'eſt 0,425969. Je retranche donc (231) ce logarithme du premier ; & j'ai 0,333699 ; prenant donc (230) le cinquieme de ce dernier, j'ai 0,066740 pour le logarithme de la raiſon cherchée. Ce logarithme, cherché dans les tables, avec une caractériſtique plus forte de 4 unités pour avoir quatre décimales, répond à 11661, à moins d'une unité près ; donc la raiſon eſt 1,1661, à moins d'un dix-millieme près. Il ne s'agit donc plus, pour avoir les moyens proportionnels, que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$, par 1,1661, puis le produit, par 1,1661, & ainſi de ſuite.

Mais ces opérations peuvent être faites beaucoup plus promptement, à l'aide des logarithmes, en ajoutant conſécutivement au logarithme 0,0425969 du premier terme $2\frac{2}{3}$, le logarithme 0,066740 de la raiſon, ſon double, ſon triple, & ſon quadruple ; enſorte qu'on aura 0,492709, 0,559449 ; 0,626189 ; 0,692929 pour les logarithmes des quatre moyens proportionnels demandés. Et ſi l'on cherche ces logarithmes, dans les tables, avec trois unités de plus à la caractériſtique, on trouve que ces quatre moyens propor-

tionnels sont 3,109 ; 3,626 ; 4,228 ; 4,931 ;

REMARQUE.

Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns que l'on doit retrancher, on peut simplifier l'opération, par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque, d'un autre qui est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier, l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 & chacun des chiffres du nombre proposé, à l'exception du dernier, pour lequel on écrit la différence entre 10 & ce chiffre. Par exemple, si j'ai 526927 à retrancher de 1000000 ; je retranche successivement, les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9 ; & le dernier chiffre, je le retranche de 10, & j'ai 473073 pour reste.

Ce reste est ce qu'on appelle le *Complément arithmétique* du nombre proposé.

La soustraction faite de cette maniere, étant trop simple, pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat, de

l'addition & de la souſtraction de pluſieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération, à l'addition. Par exemple, s'il s'agit d'ajouter les deux nombres 672736, 426452, & de retrancher de leur ſomme, les deux nombres 432752, 18675 : ce qui exige deux additions & une souſtraction; je ſubſtitue à cette opération, la ſuivante.

	672736
	426452
Complément Arith. de 432752....	567248
Complément Arith. de 18675	981325
ſomme........	2647761

c'eſt-à-dire, que j'ajoute enſemble les deux premiers nombres propoſés, & les complémens arithmétiques des deux derniers; la ſomme eſt 2647761. Il faut en ſupprimer le premier chiffre 2, & les chiffres reſtans 647761 ſont le réſultat cherché.

La raiſon de cette opération eſt facile à ſentir, en remarquant que ſi au lieu de retrancher 432752, comme on le propoſoit, j'ajoute ſon complément arithmétique, c'eſt-à-dire, 1000000 moins 432752; je fais en même tems la ſouſtraction propoſée, & une augmentation de 1000000, c'eſt-à-dire, d'une dixaine

au premier chiffre du résultat ; donc pour chaque complément arithmétique que j'aurai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du résultat.

L'application de ceci, aux logarithmes, est évidente.

Qu'il soit question, par exemple, de diviser 3760, par 79. Il faudroit retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération, j'écris. . . . .

log. 3760. 3,575188
compl. arith. du log. de 79 8,102373

somme . . . . . ~~1~~1,677561

Ainsi 1,677561 est le logarithme du quotient, & répond à 47,59 à moins d'un centieme près.

Supposons, pour second exemple, qu'il soit question de multiplier $\frac{675}{527}$ par $\frac{952}{377}$; il faudroit (106) multiplier 675, par 952 ; & 527, par 377 ; puis diviser le premier produit, par le second. Par logarithmes, on opérera ainsi . . . . . .

log. 675 2,829304
log. 952 2,978637
compl^t. Arith. du log. de 527 . . 7,287189
compl^t. Arith. du log. de 377 . . 7,423659

somme. . . . . ~~2~~0,509789

le logarithme du produit eſt donc 0,509789 qui, cherché avec trois unités de plus à la caractériſtique, répond à 3,234.

On peut faire uſage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions ſous la même forme que ceux des nombres entiers, & les employer de même dans le calcul ; par-là on évitera la diſtinction des logarithmes négatifs, & des logarithmes poſitifs. Il ſuffira de ſe ſouvenir, que la caractériſtique du logarithme des fractions, proprement dites, eſt trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$ qui n'eſt (96) autre choſe que 3 diviſé par 4 ; au lieu de retrancher le logarithme de 4, de celui de 3 ; c'eſt-à-dire, de retrancher le logarithme de 3, de celui de 4, & de donner au reſte le ſigne —, (235) ; au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4 ;

log. 3 0,477121
complt. Arith. du log. 4 9,397940

ſomme 9,875061

Cette ſomme eſt le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractériſtique eſt trop forte de 10 unités. Or il n'eſt pas néceſſaire de faire actuellement la diminution ; on peut la re-

jetter à la fin des opérations dans lesquelles on emploiera ce logarithme.

La même regle s'applique aux fractions décimales : ainsi pour avoir le logarithme de 0,575, qui n'est autre chose que $\frac{575}{1000}$, au logarithme de 575, j'ajouterois le complément arith. du logarithme de 10000.

En employant ainsi, les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en est pas plus difficile de trouver dans les tables, les valeurs, en décimales, de ces mêmes fractions. Dès que je saurai qu'un logarithme proposé, est, ou renferme un ou plusieurs complémens arithmétiques; je sais que sa caractéristique est trop forte, d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiques; ainsi si elle passe ce nombre de dixaines, il sera facile de la diminuer, & de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, & qui sera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction.

Mais si la caractéristique est au-dessous du nombre des dixaines qu'elle est censée renfermer de trop; elle appartient certainement à une fraction, que je trouverai en cette maniere : je chercherai, par ce qui a été dit (242 *& suiv.*) à quel nombre répond le logarithme proposé; & lorsque

je l'aurai trouvé, j'en séparerai, par une virgule, autant de dixaines de chiffres sur la droite, qu'il y aura de dixaines de trop dans la caractéristique.

Par exemple, si l'on me donnoit 8,732235 pour logarithme résultant d'une opération dans laquelle il est entré un complément arithmétique. Je vois, puisque sa caractéristique est au-dessous d'une dixaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherche d'abord (242) à quel nombre répond 8,732235, considéré comme logarithme de nombre entier; je trouve qu'il répond à 539802500; séparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802500 pour valeur très-approchée de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais comme il est très-rarement nécessaire d'avoir ces fractions à un tel degré de précision, on abrégera, en diminuant tout de suite la caractéristique du logarithme proposé, autant qu'il est nécessaire pour la faire tomber parmi celle des tables, & prenant seulement le nombre correspondant; on séparera autant de chiffres de moins que ne le prescrit la regle précédente, autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique. Ainsi, dans le cas présent, je diminuerois la ca-

ractériftique, de 5 unités : & ayant trouvé que le nombre correfpondant, eft 5398, j'en féparerois feulement cinq chiffres, & j'aurois 0,05398.

Dans les élévations aux puiffances, il faudra obferver, qu'en multipliant (229) le logarithme, par le nombre qui marque le degré de la puiffance, il fe trouvera qu'on multipliera auffi, ce dont la caractériftique fe trouvera être trop forte. Ainfi, en élevant au cube, par exemple; s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme propofé, c'eft-à-dire, fi la caractériftique eft trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube fera trop forte de 30 unités; & ainfi des autres. Il fera donc facile de la ramener à fa jufte valeur.

Dans les extractions des racines; pour éviter toute méprife, lorfqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera ufage, on aura foin d'ajouter ou d'ôter à la caractériftique autant de dixaines qu'il eft néceffaire pour que ce dont elle fera trop forte, foit précifément d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine : & ayant, conformément à la regle ordinaire, divifé par le nombre qui

marque le degré de la racine, la caractiſtique ſera trop forte, préciſément de 10 unités.

Par exemple, ſi l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$; au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547....

log. 276 2,440909
complt. Arith. du log. de 547 .. 7,262013

ſomme 9,702922

à la caractériſtique de laquelle ....
j'ajoute 20,

29,702922

afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines, & j'ai 29,702922 dont le tiers 9,900974 eſt le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec dix unités de trop à la caractériſtique; ainſi, conformément à ce qui a été obſervé ci-deſſus, je trouve que cette racine cubique eſt 0,7961 à moins d'un millieme près.

L'uſage des compléments arithmétiques, eſt principalement utile dans les calculs de la Trigonométrie, & par conſéquent dans pluſieurs des opérations du Pilotage que l'on veut faire avec une certaine exactitude.

FIN.

Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 21 Novembre 1764.

MEssieurs CLAIRAULT, & D'ALEMBERT qui avoient été nommés pour examiner *un Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine*, par M. BÉZOUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 21 Novembre 1764.

GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secr. perp. de l'Ac. R. des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & féaux Conseillers, le Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, Nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilege pour l'impression de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Exposants, Nous leur avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les Recherches & Observations journalieres, ou

Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Traités ou Mémoires de chacun des Particuliers, qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & qu'ils ſeront jugés dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter partout notre Royaume, pendant le temps de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, il puiſſe en être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie: Faisons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangère dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſants, ou de ceux qui auront droit d'eux; à peine de confiſcation deſdits Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenants; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Expoſants ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglements de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le ſieur Hue de Miromenil; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque

publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit ſieur Hue de Miroménil; le tout à peine de nullité desdites Préſentes : du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir leſdits Expoſants & leurs ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le premier jour de Juillet, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-dix-huit, & de notre Regne le cinquieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signe LE BEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Imprimeurs & Libraires de Paris, N° 1477, folio 582, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenſes, article 4, à toutes perſonnes, de quelque qualité qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les uteurs ou autrement; & à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre huit Exemplaires preſcrits par l'art. 108 du même Réglement. A Paris, ce 20 Août 1778.

Signé A. M. LOTTIN l'aîné, Syndic.



